MAI 19

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

B 13

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 164

Heft 3

Ausgegeben den 24. April 1931

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1931

Band 164. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Evelyn, C. J. A., and E. H. Linfoot, On a problem in the additive theory of numbers (Second paper) 131

Klein, F., Zur Theorie der Systeme von Potenzproduktkongruenzen 141

Iglisch, Rudolf, Zur Theorie der reellen Verzweigungen von Lösungen nichtlinearer Integralgleichungen 151

Estermann, Theodor, Über die Darstellungen einer Zahl als Differenz von zwei Produkten 173

Kirchhoff, Wilhelm, Reduktion simultaner partieller Differentialgleichungen bei hydrodynamischen Problemen 183

Berichtigung zur Arbeit von **N. Tschebotarŏw:** „Zur Gruppentheorie des Klassenkörpers". (Dieses Journal Bd. 161, Seite 179—193) 196

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg (Bez. Cassel), Behringweg 7.

On a problem in the additive theory of numbers. (Second paper.)

By *C. J. A. Evelyn* in Wotton and *E. H. Linfoot* in Princeton.

1. Introductory.

In a recent paper [1]) we discussed the problem of the representation of a large number n as the sum of quadratfrei numbers or, more generally, of the "M-numbers" defined as follows:

Definition.

$n = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \cdots p_\varrho^{\lambda_\varrho}$ is said to be a number of class N, or an "M-number", when $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\varrho \leqq N-1$.

Thus class 2 is the class of quadratfrei numbers. The density of the set of numbers of class N exists and is $\frac{1}{\zeta(N)}$ [2]); in fact it is almost trivial that as $x \to \infty$

$$\sum_{M \leqq x} 1 = \frac{x}{\zeta(N)} + O(x^{\frac{1}{N}}).$$

Using the analytic method of Hardy and Littlewood, we were able to prove

Theorem 1.

Let $s \geqq 3$. Then the number of representations of a large number n as the sum of s M-numbers, repetitions being allowed and order being regarded as relevant, is

$$v_s(n) = \frac{n^{s-1}}{(s-1)!} \frac{1}{\zeta^s(N)} \prod_{p^N \nmid n} \left(1 + \frac{(-1)^{s+1}}{(p^N-1)^s}\right) \prod_{p^N \mid n} \left(1 + \frac{(-1)^s}{(p^N-1)^{s-1}}\right) \cdot \{1 + O(n^{-\frac{1}{2} + \frac{1}{2N} + \varepsilon})\}$$

for every $\varepsilon > 0$, where the constant implied in O depends only on ε, N and s.

Our argument fails when $s = 2$ and though the analytic method is still applicable in principle, there seems little hope of its furnishing a practicable proof in this case. But when $s = 2$ the problem is readily accessible to elementary methods, by which we establish the complementary result:

Theorem 2.

The number of representations (in the sense of theorem 1) of a large number n as the sum of two M-numbers is

$$v_2(n) = \frac{n}{\zeta^2(N)} \prod_{p^N \nmid n} \left(1 - \frac{1}{(p^N-1)^2}\right) \prod_{p^N \mid n} \left(1 + \frac{1}{p^N - 1}\right) + O(n^{\frac{2}{N+1} + \varepsilon})$$

for every $\varepsilon > 0$, where the O depends only on N, ε.

Combining these, we may state the complete result as

Theorem 3.

Let $N, s \geqq 2$ and

---

[1]) Math. Zeitschrift **30** (1929), 433—448.

[2]) Class 1 consists of the single number 1. We assume throughout this paper that $N \geqq 2$.

$$S(n,s)=\prod_{p^N\nmid n}\left(1+\frac{(-1)^{s+1}}{(p^N-1)^s}\right)\prod_{p^N\mid n}\left(1+\frac{(-1)^s}{(p^N-1)^{s+1}}\right).$$

Then the number of representations of a large number n as the sum of s M-numbers, repetitions being allowed and order being regarded as relevant, is

$$v_s(n)=\frac{n^{s+1}}{(s-1)!}\frac{1}{\zeta^s(N)}S(n,s)\{1+O(n^{-H+\varepsilon})\}$$

for every $\varepsilon>0$, where

$$H=\frac{N-1}{N+1}\qquad(s=2)$$
$$=\frac{N-1}{2N}\qquad(s\geqq 3)$$

and O depends only on N, ε and s.

In particular, the number of representations of a large M-number as the sum of s M-numbers differs asymptotically from the "normal" number

$$\frac{n^{s-1}}{(s-1)!}\frac{1}{\zeta^s(N)}$$

by a constant factor

$$\prod_p\left(1+\frac{(-1)^{s+1}}{(p^N-1)^s}\right).$$

2. Notation and preliminary lemmas.

$N\geqq 2$ is an integer chosen once and for all, ε is an arbitrary positive number. A statement containing the symbol ε is to be understood as holding for every $\varepsilon>0$. $A_1, A_2, \ldots, A_{14}$ are positive constants depending on N, ε only, c_1, c_2, c_3 positive constants depending only on N.

Lemma 2.1.

If p, q, n are positive integers and $R(p,q,n)$ denotes the number of solutions in positive integral x, y of the Diophantine equation

$$px+qy=n,$$

then

$$R(p,q,n)=\frac{n(p,q)}{pq}+2\theta_1\quad(p+q\leqq n,\ (p,q)\mid n)$$
$$=0\qquad\qquad\qquad

where

$$mq + \beta = n, \quad 0 < \beta \leqq q .$$

Now since $(p, q) = 1$ the numbers $0, q, 2q, \ldots, (p-1)q, \ldots$ run once through the rests of p and then repeat them. So then do the numbers $\beta, \beta + q, \ldots, \beta + (p-1)q, \ldots$ The rest 0 is taken once every p terms, therefore, and the set (2. 11) contains

$$\left[\frac{m}{p}\right] \text{ or } \left[\frac{m}{p}\right] + 1$$

integers, according to circumstances. Since

$$\left[\frac{m}{p}\right] = \left[\frac{n-\beta}{pq}\right] = \frac{n}{pq} - \frac{\beta}{pq} - \theta_2$$

with $0 \leqq \theta_2 = \theta_2(p, q, n) < 1$, we have

$$R(p, q, n) = \frac{n}{pq} + 2\theta_1$$

with $-1 < \theta_1 = \theta_1(p, q, n) < \frac{1}{2}$ and a fortiori $-1 < \theta_1 < 1$.

Lemma 2. 2.

The number of solutions in x, y of the Diophantine equation

(2. 21) $$ax^N + by^N = n ,$$

in which all the letters denote positive integers, is less than $A_1 n^\varepsilon$.

This lemma, together with a proof for $N = 2$ (and so for all even N) was communicated to us by Prof. H. Rademacher, to whom our thanks are due for helpful criticism. The extension to general N was made by Mr. A. Oppenheim, whose (unpublished) proof we give here.

Proof.

The identity

$$n = ax^N + by^N = [\sqrt[N]{a}\,x - \sqrt[N]{-b\,y}\}\{(\sqrt[N]{a}\,x)^{N-1} + (\sqrt[N]{a}\,x)^{N-2}\sqrt[N]{-b\,y} + \cdots + (\sqrt[N]{-b\,y})^{N-1}] ,$$

(with any fixed choice of Nth roots), gives a factorisation of the Hauptideal (n) in the corpus $K(\sqrt[N]{a}, \sqrt[N]{-b})$ which is of degree $\leqq N^2$. In this corpus $\mathfrak{N}(n)$ is at most the N^2th power of n and every rational prime is the product of at most N^2 prime ideals. Denoting by $D((n))$ the number of ideal divisors of (n) we therefore see that Runge's classical proof of the estimation

$$d(n) < A_2 n^\varepsilon$$

for the classical divisor-function $d(n)$ is equally applicable here and leads to the result

$$D((n)) < A_3(\mathfrak{N}(n))^\varepsilon < A_4 n^\varepsilon .$$

The proof of the lemma would now be complete were it not for the fact that two or more of the numbers $x\sqrt[N]{a} - y\sqrt[N]{-b}$ may be associated and so correspond to the same ideal divisor of (n). Suppose that $ax^N + by^N = n$ is a fixed solution and $au^N + bv^N = n$ any other solution of (2. 21). We have to find the conditions under which

(2. 22) $$\xi = \frac{u\sqrt[N]{a} - v\sqrt[N]{-b}}{x\sqrt[N]{a} - y\sqrt[N]{-b}}$$

can be a unity.

Writing $\beta = \frac{b}{a}$, we consider the equation

$$z^N + \beta = 0.$$

Its roots

$$z_k = e^{\frac{2\pi i k}{N}} \sqrt[N]{-\beta} \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1),$$

where $\sqrt[N]{-\beta}$ is any particular Nth root, are all different and

$$ax^N + by^N = a(x^N + \beta y^N) = a(x - z_1 y\, x)(-z_2 y) \cdots (x - z_N y).$$

Let

$$\xi_k = \frac{u - z_k v}{x - z_k y}.$$

Then

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \xi_k &= \sum_{k=1}^{N} \frac{u - z_k v}{x - z_k y} \\
&= \frac{1}{y} \sum_{k=1}^{N} \frac{(uy - vx) + (x - z_k y)\, v}{x - z_k y} \\
&= \frac{uy - vx}{y} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{x - z_k y} + \frac{v}{y} \sum_{k=1}^{N} 1 \\
&= \frac{uy - vx}{y^2} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\frac{x}{y} - z_k} + \frac{Nv}{y}.
\end{aligned}$$

Writing $f(z) = z^N + \beta = \prod_{k=1}^{N}(z - z_k)$, we have

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\frac{x}{y} - z_k} = \frac{f'\left(\frac{x}{y}\right)}{f\left(\frac{x}{y}\right)} = \frac{N x^{N-1} y}{x^N + \beta y^N} = \frac{aN x^{N-1} y}{ax^N + by^N} = \frac{aN}{n} x^{N-1} y.$$

Whence

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{N} \xi_k &= \frac{aN x^{N-1}}{ny} (uy - vx) + \frac{Nv}{y} \\
&= \frac{N}{ny} [ax^{N-1} (uy - vx) + (ax^N + by^N) v] \\
&= \frac{N}{ny} (ax^{N-1} uy + by^N v) \\
&= \frac{N}{n} (ax^{N-1} u + by^{N-1} v)
\end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{N} \xi_k &= \frac{\prod_{k=1}^{N}(u - z_k v)}{\prod_{k-1}^{N}(x - z_k y)} = \frac{u^N + \beta v^N}{x^N + \beta y^N} \\
&= \frac{au^N + bv^N}{ax^N + by^N} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Thus the ξ_k are the roots of the equation

$$\xi^N - \frac{N}{n} (ax^{N-1} u + by^{N-1} v)\, \xi^{N-1} + \cdots + (-1)^N = 0,$$

whose coefficients, being symmetric functions of the ξ_k and consequently of the z_k, are rational numbers. Now (2. 22) is one of the ξ_k and so satisfies this equation. It cannot, therefore, be an integer of the corpus (still less a unity) unless

$$\frac{N}{n}(ax^{N-1}u + by^{N-1}v)$$

is an integer, i. e. unless

$$ax^{N-1}u + by^{N-1}v = \frac{n}{N}m_1$$

for some positive integer m_1. By Schwarz's inequality

$$ax^{N-1}u + by^{N-1}v \leqq (au^N + bv^N)^{\frac{1}{N}}(ax^N + by^N)^{\frac{N-1}{N}} = n$$

with equality only when $uy = vx$, which is excluded by hypothesis. Thus

$$ax^{N-1}u + by^{N-1}v \leqq n - 1$$

$$m_1 \leqq N\Big(1 - \frac{1}{n}\Big),$$

so that

$$1 \leqq m_1 \leqq N - 1.$$

But for each value of m_1 the equations

$$\begin{cases} ax^{N-1}u + by^{N-1}v = \dfrac{n}{N}m_1 \\ au^N + bv^N = n \end{cases}$$

have at most N solutions in real u, v and a fortiori in positive integral u, v. Thus *the number of associated numbers*

$$\sqrt[N]{a}\,x - \sqrt[N]{-b}\,y$$

does not exceed $N(N-1)+1$. It follows that the number of solutions of (2. 21)

$$< (N(N-1)+1)D((n)) < (N(N-1)+1)A_4 n^{\varepsilon} = A_1 n^{\varepsilon}$$

and the lemma is proved.

3. Proof of Theorem 2.

Before proceeding to the proof proper, we give an argument which enables us to prove the asymptotic results, though with an inferior error term, for all values of N except the lowest, namely 2.

3. 1. Evidently

$$\sum_{m^N|n}\mu(m) = 1 \text{ if } n \text{ is an } M\text{-number}$$

$$= 0 \quad \text{otherwise.}$$

Thus

$$r_2(n) = \sum_{M+M'=x} 1 = \sum_{\substack{r+s=n \\ r,s\geqq 1}} \sum_{m^N|r}\mu(m)\sum_{m'^N|s}\mu(m') = \sum_{am^N+bm'^N=n}\mu(m)\,\mu(m')$$

where the summation is over the positive integers a, b, m, m',

$$= \sum_{m,m'\geqq 1}\mu(m)\,\mu(m')\,R(m^N, m'^N, n)$$

$$= \sum_{\substack{m^N+m'^N\leqq n \\ (m,m')^N|n}}\mu(m)\,\mu(m')\Big(\frac{n(m,m')^N}{m^N m'^N} + 2\theta_1\Big)$$

by lemma 2. 1,

$$= n \sum_{\substack{m^N + m'^N \leqq n \\ (m,m')^N | n}} \frac{(m, m')^N \mu(m) \mu(m')}{m^N m'^N} + 2\theta_3 \sum_{m,m' \leqq n^{1/N}} 1,$$

where $|\theta_3| < 1$. The second term is absolutely less than $2n^{2/N}$. The first differs from

$$n \sum_{\substack{m,m'=1 \\ (m,m')^N | n}}^{\infty} \frac{(m, m')^N \mu(m) \mu(m')}{m^N m'^N}$$

by a quantity which is absolutely less than n times

$$\sum_{\substack{m^N + m'^N > n \\ (m,m')^N | n}} \frac{(m, m')^N}{m^N m'^N} = \sum_{d^N | n} d^N \sum_{\substack{m^N + m'^N > n \\ (m,m') = d}} \frac{1}{m^N m'^N}$$

$$(3.\ 11) \qquad = \sum_{d^N | n} d^N \sum_{\substack{r^N + r'^N > \frac{n}{d^N} \\ (r,r')=1}} \frac{1}{d^{2N} r^N r'^N} < \sum_{d^N | n} \frac{1}{d^N} \sum_{r^N + r'^N > \frac{n}{d^N}} \frac{1}{r^N r'^N}.$$

Now

$$(3.\ 12) \qquad \sum_{r^N + r'^N > \frac{n}{d^N}} \frac{1}{r^N r'^N} \leqq 2 \sum_{r \geqq n^{1/N}/2^{1/N} d} \frac{1}{r^N} \sum_{r'=1}^{\infty} \frac{1}{r'^N}.$$

Since

$$\sum_{r \geqq n^{1/N}/2^{1/N} d}^{\infty} \frac{1}{r^N} < \frac{2d^N}{n} + \int_{N^{1/N}/2^{1/N} d}^{\infty} \frac{dt}{t^N}$$

$$= \frac{2d^N}{n} + \frac{1}{N-1} \left(\frac{2}{n}\right)^{1-\frac{1}{N}} d^{N-1}$$

$$< \frac{2d^N}{n} + \frac{2d^{N-1} n^{1/N}}{n}$$

$$< \frac{4d^{N-1} n^{1/N}}{n};$$

for $d \leqq n^{1/N}$, the sum (3. 12) is less than

$$8\zeta(N) d^{N-1} n^{-1+\frac{1}{N}}$$

and (3. 11) is less than

$$8\zeta(N) \sum_{d^N | n} \frac{1}{d} \cdot n^{-1+\frac{1}{N}} < A_8 n^{-1+\frac{1}{N}+\varepsilon} < c_1 n^{-1+\frac{2}{N}}.$$

Thus

$$(3.\ 13) \qquad r_2(n) = n \sum_{\substack{m,m'=1 \\ (m,m')^N | n}}^{\infty} \frac{(m, m')^N \mu(m) \mu(m')}{m^N m'^N} + O(n^{\frac{2}{N}}).$$

The coefficient of n is easily evaluated. Writing $\varrho = \prod_{p^N | n} p$, it is

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(m)}{m^N} \sum_{\substack{m'=1 \\ (m,m') | \varrho}}^{\infty} (m, m')^N \frac{\mu(m')}{m'^N}.$$

Since $(m, m')^N \frac{\mu(m')}{m'^N}$ is a multiplicative function of m', the inner sum is

$$\prod_{(m,p)\mid\varrho}\left(1-\frac{(m,p)^N}{p^N}\right)=\prod_{p\nmid m}\left(1-\frac{(m,p)^N}{p^N}\right)\prod_{\substack{p\mid m\\ p\mid\varrho}}\left(1-\frac{(m,p)^N}{p^N}\right)$$

$$=\prod_{p\nmid m}\left(1-\frac{1}{p^N}\right)\prod_{p\mid(m,\varrho)}(1-1)$$

$$=\begin{cases}0 & (m,\varrho)>1,\\ \prod\limits_{p\nmid m}\left(1-\frac{1}{p^N}\right) & (m,\varrho)=1.\end{cases}$$

Thus the series becomes

$$\sum_{\substack{m=1\\(m,\varrho)=1}}^{\infty}\frac{\mu(m)}{m^N}\prod_{p+m}\left(1-\frac{1}{p^N}\right)$$

$$=\frac{1}{\zeta(N)}\sum_{\substack{m=1\\(m,\varrho)=1}}^{\infty}\frac{\mu(m)}{m^N}\prod_{p\mid m}\frac{p^N}{p^N-1}$$

$$=\frac{1}{\zeta(N)}\prod_{p\nmid\varrho}\left(1-\frac{1}{p^N}\frac{p^N}{p^N-1}\right),$$

since the summand is multiplicative,

$$=\frac{1}{\zeta(N)}\prod_{p^N\nmid n}\frac{p^N-2}{p^N-1}$$

$$=\frac{1}{\zeta^2(N)}\prod_{p^N\nmid n}\frac{p^{2N}-2p^N}{(p^N-1)^2}\prod_{p^N\mid n}\frac{p^N}{p^N-1}$$

$$=\frac{1}{\zeta^2(N)}\prod_{p^N\nmid n}\left(1-\frac{1}{(p^N-1)^2}\right)\prod_{p^N\mid n}\left(1+\frac{1}{(p^N-1)}\right)$$

$$=\frac{1}{\zeta^2(N)}S(n,2)$$

in the notation of theorem 3. Since for all n

$$\prod_p\left(1-\frac{1}{p^N-1}\right)<S(n,2)<\prod_p\left(1+\frac{1}{p^N-1}\right)$$

we can write (3. 13) as

$$v_2(n)=\frac{n}{\zeta^2(N)}S(n,2)\{1+O(n^{-1+\frac{2}{N}})\}$$

which proves theorem 2 for $N\leqq 3$ with the inferior error index $-1+\frac{2}{N}$.

3. 2. To prove theroem 2 as stated in the introduction we use a refinement of the same argument. As before

$$v_2(n)=\sum_{M+M'=n}1=\sum_{\substack{r+s=n\\ r,s\geqq 1}}\sum_{m^N\mid r}\mu(m)\sum_{m'^N\mid s}\mu(m')$$

$$=\sum_{am^N+bm'^N=n}\mu(m)\,\mu(m')$$

where the summation is over the positive integers a, b, m, m'. Now

$$ab\,m^N\,m'^N=\frac{1}{4}(am^N+bm'^N)^2-\frac{1}{4}(am^N-bm'^N)^2\leqq\frac{1}{4}n^2$$

throughout this sum. Let $\xi = n^{\frac{2}{N+1}} \geqq 1$. At least one of the inequalities

$$ab \leqq \xi, \quad m^N m'^N \leqq \frac{n^2}{4\xi}$$

is always satisfied, and we can write

$$\begin{aligned} r_2(n) &= \sum_{m^N m'^N \leqq \frac{n^2}{4\xi}} \sum_{am^N + bm'^N = n} \mu(m)\,\mu(m') \\ &\quad + \sum_{ab \leqq \xi} \sum_{\substack{am^N + bm'^N = n \\ m^N m'^N > \frac{n^2}{4\xi}}} \mu(m)\,\mu(m')) \\ &= U + V, \end{aligned} \tag{3.20}$$

say. Here

$$U = \sum_{m^N m'^N \leqq \frac{n^2}{4\xi}} \mu(m)\,\mu(m')\,R(m^N, m'^N, n)$$

in the notation of lemma 2.1. Applying the lemma:

$$U = n \sum_{\substack{m^N m'^N \geqq n^2 \,|\, 4\xi \\ m^N + m'^N \leqq n,\ (m,m')^N | n}} \frac{(m,m')^N\,\mu(m)\,\mu(m')}{m^N\,m'^N} + 2\theta_4 \sum_{m^N m'^N \leqq \frac{n^2}{4\xi}} 1$$

and since

$$\begin{aligned} \sum_{m^N m'^N \leqq \frac{n^2}{4\xi}} 1 &\leqq \sum_{m^N=1}^{n^2/4\xi} \sum_{m'^N=1}^{n^2/4\xi m^N} 1 \leqq \sum_{m=1}^{n^{\frac{2}{N}}(4\xi)^{-\frac{1}{N}}} \frac{n^{\frac{2}{N}}(4\xi)^{-\frac{1}{N}}}{m} \\ &< n^{\frac{2}{N}}(4\xi)^{-\frac{1}{N}} \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m} \\ &< A_9 n^{\frac{2}{N}+\varepsilon} \xi^{-\frac{1}{N}} \\ &= A_9 n^{\frac{2}{N+1}+\varepsilon}, \end{aligned}$$

this gives

$$\left| U - n \sum_{\substack{m^N m'^N \leqq n^2/4\xi \\ m^N + m'^N \leqq n,\ (m,m')^N | n}} \frac{(m,m')^N\,\mu(m)\,\mu(m')}{m^N\,m'^N} \right| < A_9 n^{\frac{2}{N+1}+\varepsilon}. \tag{3.21}$$

We now remove the restrictions $m^N m'^N \leqq \frac{n^2}{4\xi}$, $m^N + m'^N \leqq n$ in the sum on the left. The resulting error is absolutely less than

$$2 \sum_{\substack{m=1 \\ (m,m')^N | n}}^{\infty} \sum_{m' > n^{1/N_2 - 1/N_\xi - 1/2N}} \frac{(m,m')^N}{m^N\,m'^N},$$

for the terms thus added have either $m^N m'^N > \frac{n^2}{4\xi}$ or $m^N + m'^N > n$ (or both). The addition of a factor 2 enables us to suppose that $m' \geqq m$; we then have in either case (since $\xi \geqq 1$)

$$m'^N > \frac{n}{2\sqrt{\xi}}.$$

This sum

$$= 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^N}\sum_{\substack{d\mid m\\ d^N\mid n}} d^N \sum_{\substack{m'\geqq n^{1/N}2^{-1/N}\xi^{-1/2N}\\ (m,m')=d}} \frac{1}{m'^N}$$

$$< 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^N}\sum_{d^N\mid(m^N,n)}\ \sum_{r\geqq\frac{1}{d}\left(\frac{2}{n}\right)^{\frac{1}{N}}\xi^{-\frac{1}{2N}}} \frac{1}{r^N}$$

$$< 2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^N}\sum_{d^N\mid(m^N,n)} c_2\, d^{N-1}\left(\frac{2}{n}\right)^{1-\frac{1}{N}}\xi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{N}}$$

$$= c_3\, n^{-1+\frac{1}{N}}\xi^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2N}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^N}\sum_{d^N\mid(m^N,n)} d^{N-1}. \tag{3.22}$$

The inner sum is zero unless $d\mid m$. Write $m = m'd$ and we have

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^N}\sum_{d^N\mid(m^N,n)} d^{N-1} = \sum_{m'=1}^{\infty}\frac{1}{m'^N}\sum_{d^N\mid n}\frac{1}{d} < \zeta(N)\sum_{d\leqq n}\frac{1}{d}.$$

$$< A_{10}\, n^{\varepsilon}.$$

Thus (3.22) is less than $A_{11}\, n^{-1+\frac{1}{N}+\varepsilon}\xi^{\frac{N-1}{2N}}$ and so by (3. 21)

$$\left|U - n\sum_{\substack{m,m'=1\\ (m,m')^N\mid n}}^{\infty}\frac{(m,m')^N\,\mu(m)\,\mu(m')}{m^N\,m'^N}\right|$$

$$< A_9\, n^{\frac{1}{N+1}+\varepsilon} + A_{11}\, n^{\frac{1}{N}+\varepsilon}\xi^{\frac{N-1}{2N}}$$

$$= A_9\, n^{\frac{2}{N+1}+\varepsilon} + A_{11}\, n^{\frac{2}{N+1}+\varepsilon}$$

$$= A_{12}\, n^{\frac{2}{N+1}+\varepsilon}. \tag{3.23}$$

Next consider

$$V = \sum_{ab\leqq\xi}\ \sum_{\substack{am^N+bm'^N=n\\ m^N m'^N > \frac{n^2}{4\xi}}} \mu(m)\,\mu(m').$$

Plainly

$$|V| \leqq \sum_{ab\leqq\xi}\ \sum_{am^N+bm'^N=n} 1$$

$$< \sum_{ab\leqq\xi} A_1\, n^{\varepsilon}$$

by lemma 2.2,

$$= A_1\, n^{\varepsilon}\sum_{a=1}^{\xi}\sum_{b=1}^{\xi/a} 1 \leqq A_1\, n^{\varepsilon}\,\xi\sum_{a=1}^{\xi}\frac{1}{a}$$

$$< A_{13}\, n^{\varepsilon}\,\xi^{1+\varepsilon} < A_{14}\, n^{\frac{2}{N+1}+\varepsilon}. \tag{3.24}$$

From (3. 20), (3. 23), (3. 24) we thus have

$$v_2(n) = n \sum_{\substack{m,m'=1 \\ (m,m')^N \mid n}}^{\infty} \frac{(m,m')^N \mu(m)\mu(m')}{m^N m'^N} + O(n^{\frac{2}{N+1}+\varepsilon})$$

$$= \frac{n}{\zeta^2(N)} S(n,2)\{1 + O(n^{-\frac{N-1}{N+1}+\varepsilon})\}$$

as before and the proof is complete.

4. Conclusion.

The argument of (3. 1) and its refinement in (3. 2) are not restricted in their application to the case $s = 2$. The argument of (3. 1), for instance, goes through with only the most trivial changes whenever $2 \leqq s < N$. But we have here been content to discuss only the unsolved (und formally simplest) case $s = 2$ [3]).

[3]) (Added Nov. 6th., 1930). Since writing the above we have been able to obtain the asymptotic formula for $v_s(n)$ by purely elementary arguments for all s, N. The proof will appear in a separate paper.

Eingegangen 13. Februar 1930.

Zur Theorie der Systeme von Potenzproduktkongruenzen.

Von *F. Klein* in Barmen.

Problemstellung.

In einer früheren Arbeit [1]) habe ich den Aufbau der zahlentheoretischen Funktion untersucht, die angibt, wieviele Lösungen ein vorgelegtes System von ganzzahligen Polynomkongruenzen aufweist, wenn überdies gewisse Nebenbedingungen erfüllt sein sollen.

In einer zweiten Arbeit [2]) habe ich eingehend den besonderen Fall behandelt, daß ein System von *linearen* Kongruenzen vorliegt, das in *Lückenzahlen*, d. h. in zum Modul teilerfremden Zahlen, gelöst werden soll.

In der vorliegenden Arbeit handelt es sich um einen weiteren Spezialfall, nämlich um die Bestimmung der Lösungsanzahl eines Systems von *Potenzproduktkongruenzen*, kurz eines P-Systems, d. h. eines Kongruenzensystems, das dadurch charakterisiert ist, daß die linke Seite einer jeden dem System angehörenden Kongruenz ein Potenzprodukt in den Unbestimmten ist; und zwar soll diese Bestimmung unter der Voraussetzung geschehen, daß jede Unbestimmte in bezug auf jede im Modul enthaltene Primzahlpotenz ein h-ter Nichtrest ist, wenn h eine positive ganze Zahl ist, die h-te Nichtreste erlaubt.

Es wird sich dabei zeigen, daß die Behandlung der beiden Spezialfälle nicht nur analog verläuft, wie zu erwarten ist, sondern auch im wesentlichen mit denselben Hilfsmitteln durchgeführt werden kann. Weitere Untersuchungen in dieser Richtung sollen demnächst mitgeteilt werden.

Im folgenden treten nur ganze rationale Zahlen auf.

§ 1. Reduktion auf den Fall eines Primzahlmoduls.

1. Es seien h und m feste Zahlen mit

$$h > 0,\ m > 1, \quad (h, m) = 1$$

und der Primfaktorenzerlegung

$$m = \prod_{\nu=1}^{\lambda} p_\nu^{\delta_\nu} \quad (\delta_\nu > 0)\,.$$

Jede zu m teilerfremde Zahl, die in bezug auf *jeden* Faktor $p_\nu^{\delta_\nu}$ von m ein h-ter Potenzrest ist, möge ein *totaler h-ter Rest* mod m oder kurz eine $R^{(h)}(m)$-Zahl genannt werden. Entsprechend bezeichnen wir als *totalen h-ten Nichtrest* mod m, kurz als $N^{(h)}(m)$-Zahl,

[1]) Über die Anzahl der Lösungen von Kongruenzensystemen, J. für Math. **159** (1928), S. 29—35. (Weiterhin mit I zitiert.)

[2]) Zur Theorie der linearen Kongruenzensysteme, J. für Math. **159** (1928), S. 238—245. (Weiterhin mit II zitiert.)

jede Zahl, die in bezug auf *jeden* Faktor $p_\nu^{\delta_\nu}$ die Rolle eines h-ten Nichtrestes spielt. Diese Definitionen bleiben auch sinnvoll für den Fall, daß m eine Primzahlpotenz ist.

Das P-System liege in der Form

$$\prod_{k=1}^{r} x_k^{e_{ik}} \equiv a_i \bmod m \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{1}$$

vor, wobei alle $e_{ik} \geqq 0$ vorausgesetzt werden dürfen. Ein diesem System genügendes System (x_k) von $N^{(h)}(m)$-Zahlen werde als $N^{(h)}(m)$-Lösung von (1) bezeichnet. $\psi(m)$ gebe die Anzahl der mod m inkongruenten $N^{(h)}(m)$-Lösungen von (1) an. Wie in I, S. 31 bewiesen, gilt dann

$$\psi(m) = \prod_{\nu=1}^{\lambda} \psi(p_\nu^{\delta_\nu}), \tag{2}$$

wenn $\psi(p^\delta)$ die Anzahl der mod p^δ inkongruenten $N^{(h)}(p^\delta)$-Lösungen von

$$\prod_{k=1}^{r} x_k^{e_{ik}} \equiv a_i \bmod p^\delta \tag{3}$$

angibt. (2) stellt den ersten Schritt auf dem Weg zur angekündigten Reduktion dar.

2. Sind

$$b_{ik} = b_{ik}(y_1, \ldots, y_\varrho) \qquad (i = 1, \ldots, s;\ k = 1, \ldots, r;\ s \leqq r)$$

ganzzahlige Polynome in ϱ Unbestimmten, so heiße die Matrix (b_{ik}) an der Stelle $y_1, \ldots, y_\varrho$ für $\sigma \leqq s$ vom *Rang* σ mod p bzw. *gleichmäßig vom Rang* σ mod p, wenn an der betreffenden Stelle *mindestens eine* bzw. *jede* σ-reihige Determinante aus (b_{ik}) zu p teilerfremd ist und überdies für $\sigma < s$ *jede* Determinante mit mehr als σ Reihen den Faktor p enthält. Weiter heiße (b_{ik}) vom Rang σ mod m bzw. gleichmäßig vom Rang σ mod m, wenn (b_{ik}) für *jeden* Primfaktor p von m vom Rang σ mod p bzw. gleichmäßig vom Rang σ mod p ist.

Für den Fall, daß in (3) der Primfaktor p mit einem Exponenten $\delta > 1$ behaftet ist, machen wir die folgende Annahme: Setzen wir für den Augenblick

$$f_i(x_1, \ldots, x_r) = \prod_{k=1}^{r} x_k^{e_{ik}},$$

so soll die Funktionalmatrix der f_i vom Rang s mod p sein an allen Stellen $x_1, \ldots, x_r$, die $N^{(h)}(p)$-Lösungen von

$$\prod_{k=1}^{r} x_k^{e_{ik}} \equiv a_i \bmod p \tag{4}$$

sind. Ist diese Bedingung erfüllt, so gilt gemäß I, S. 34 die Relation

$$\psi(p^\delta) = p^{(r-s)(\delta-1)}\psi(p), \tag{5}$$

womit die Reduktion vollzogen ist.

3. Infolge des rein multiplikativen Aufbaus der f_i und der Tatsache, daß jedes x_k als $N^{(h)}(p)$-Zahl teilerfremd zu p ist und somit auch alle a_i teilerfremd zu p sein müssen, kann die die Funktionalmatrix betreffende Annahme folgendermaßen durch eine formal einfachere ersetzt werden. Zunächst ist $s \leqq r$ erforderlich. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir sodann voraussetzen, daß an den in Frage kommenden Stellen $x_1, \ldots, x_r$ stattfindet:

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_s}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_s}{\partial x_s} \end{vmatrix} \not\equiv 0 \bmod p,$$

woraus folgt

$$x_1 \cdots x_s \, \Delta(x) = f_1 \cdots f_s \begin{vmatrix} e_{11} & \cdots & e_{1s} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ e_{s1} & \cdots & e_{ss} \end{vmatrix} \not\equiv 0 \bmod p .$$

Demnach ist notwendig und hinreichend für $\Delta(x) \not\equiv 0 \bmod p$, daß die aus den entsprechenden e_{ik} gebildete Determinante nicht durch p teilbar ist; (5) findet also statt, wenn die *Exponentenmatrix* (e_{ik}) vom Rang s mod p ist.

§ 2. Bestimmung von $\psi(p)$.

Nach den vorhergehenden Ausführungen können wir uns auf die Untersuchung der Anzahl $\psi(p)$ der mod p inkongruenten $N^{(h)}(p)$-Lösungen von (4) beschränken. Ein für die Praxis geeignetes Verfahren zur Bestimmung von $\psi(p)$ ist bisher weder für den allgemeinen Fall noch für den Fall (A) bekannt, daß nämlich (4) *mindestens einmal* nach s Unbestimmten x_k aufgelöst werden kann. Dagegen gelingt die Bestimmung von $\psi(p)$ für den unter (A) enthaltenen Fall (B), daß (4) nach s *beliebigen* Unbestimmten x_k aufgelöst werden kann, was $\binom{r}{s}$ verschiedene Auflösungsmöglichkeiten von (4) voraussetzt. Übrigens besagt (A) genau dasselbe wie die Forderung, daß die Matrix (e_{ik}) vom Rang s mod $p-1$ ist, während (B) mit der weitergehenden Forderung äquivalent ist, daß (e_{ik}) gleichmäßig vom Rang s mod $p-1$ ist, wie man sofort sieht, wenn man vermittelst der stets möglichen Substitution

$$\left.\begin{aligned} x_k &\equiv g^{\xi_k} \\ a_i &\equiv g^{e_i} \end{aligned}\right\} \bmod p ,$$

unter g eine feste primitive Wurzel mod p verstanden, (4) in

$$\sum_{k=1}^{r} e_{ik} \, \xi_k \equiv e_i \mod p-1$$

transformiert.

Bei dieser Gelegenheit werde bemerkt, daß das Problem, (4) in $R^{(h)}(p)$-Zahlen aufzulösen, sogar für den allgemeinen Fall trivial ist; beispielsweise sind im Fall (A) stets $\left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-s}$ derartige Lösungen vorhanden.[2a]) $R^{(h)}(p)$-Lösungen sind selbstverständlich nur möglich, wenn alle a_i auch $R^{(h)}(p)$-Zahlen sind.)

1. Wir wenden uns der Bestimmung von $\psi(p)$ für den Fall (B) zu und gehen in der Weise vor, daß wir aus der Gesamtheit *aller ganzzahligen* Lösungen (x_k) von (4), d. h. aller Lösungen in nicht durch p teilbaren Zahlen, zunächst diejenigen ausscheiden, bei denen genau *eine* Komponente x_k eine $R^{(h)}(p)$-Zahl ist; sodann entfernen wir alle Lösungen, bei denen genau *zwei* Komponenten $R^{(h)}(p)$-Zahlen sind usw. Schließt man noch den Fall $s = r$ aus, so kann dieses „Siebverfahren" vermittelst eines in II, § 1 angegebenen Hilfssatzes formelmäßig dargestellt werden. Wir identifizieren das dortige Kongruenzensystem (1) mit dem jetzigen (4), jedes der dortigen Restklassensysteme S_k mit dem aus allen zu p teilerfremden Zahlen bestehenden Restklassensystem und jedes der dortigen Restklassensysteme S'_k mit dem alle $N^{(h)}(p)$-Zahlen umfassenden Restklassensystem. Die dortige Zahl n hat jetzt den Wert $p-1$; das dortige σ_k gibt jetzt an, wieviel verschiedene $R^{(h)}(p)$-Zahlen das reduzierte Restklassensystem mod p aufweist, d. h. es gilt

[2a]) Dabei ist h als Teiler von $p-1$ angenommen.

$$\sigma_k = \sigma = \frac{p-1}{(h, p-1)} \qquad (k = 1, \ldots, r);$$

infolgedessen ist das dortige ϱ durch r zu ersetzen. Da überdies für das dortige ω der Wert $r - s$ zulässig ist [3]), geht die dortige Beziehung (3) über in

$$(6) \quad \psi(p) = \sum_{\gamma=0}^{r-s} (-1)^\gamma \binom{r}{\gamma} (p-1)^{r-s-\gamma} \left(\frac{p-1}{(h, p-1)}\right)^\gamma - \sum_{\beta=r-s+1}^{r} \left\{ D(\beta) \sum_{\alpha=0}^{r-s} (-1)^\alpha \binom{\beta}{\alpha} \right\}.$$

Hierbei bedeutet $D(\beta)$ die Anzahl der Lösungen von (4) derart, daß unter den r Komponenten x_k genau β vorhanden sind, die $R^{(h)}(p)$-Zahlen sind.

Nebenbei gilt (6) auch noch für $(h, p-1) = 1$, wenn es also gar keine $N^{(h)}(p)$-, sondern nur $R^{(h)}(p)$-Zahlen gibt. In diesem Fall findet nämlich statt:

$$D(r-s+1) = D(r-s+2) = \cdots = D(r-1) = 0, \quad D(r) = (p-1)^{r-s}$$

und somit $\psi(p) = 0$, wie es auch sein muß.

Weiterhin werde h als von 1 verschiedener Teiler von $p - 1$ vorausgesetzt, d. h.

$$(h, p-1) = h > 1.$$

2. Bei der Bestimmung der in (6) auftretenden „Anfangswerte" $D(\beta)$ kann folgendermaßen verfahren werden. (Man berücksichtige, daß x_k dann und nur dann eine $N^{(h)}(p)$-Zahl ist, wenn gilt $\xi_k \equiv 0 \bmod h$). Es sei E_λ eine der s-reihigen Determinanten, die man auf $\binom{r}{s}$ verschiedene Arten vermittelst der Matrix (e_{ik}) bilden kann. Weiter bezeichne $E_\lambda^{(\mu)}$ die Determinante, die dadurch entsteht, daß man in E_λ die μ-te Spalte $(\mu = 1, \ldots, s)$ durch $e_1, \ldots, e_s$ ersetzt. d_λ gebe die Anzahl der $E_\lambda^{(\mu)}$ an, die durch h teilbar sind, für die also die Zahlen

$$g E_\lambda^{(\mu)} \ (\mu = 1, \ldots, s)$$

$R^{(h)}(p)$-Zahlen sind [4]). Man löse nun (4) durch geeignete Potenzerhebungen und Multiplikationen nach den s Unbestimmten auf, die den Spalten von E_λ entsprechen, und nehme darauf für die übrigen $r - s$ Unbestimmten alle möglichen $R^{(h)}(p)$-Zahlen. Die auf diese Weise erzeugten $\left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-s}$ verschiedenen Lösungen weisen genau $r - s + d_\lambda$ Komponenten x_k auf, die $R^{(h)}(p)$-Zahlen sind. Gibt ferner $D'(d)$ an, wieviele der Zahlen

$$d_1, \ldots, d_{\binom{r}{s}}$$

den Wert d haben $(0 \leqq d \leqq s)$, so entstehen $\left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-s} D'(d)$ derartige Lösungen, die aber nicht alle voneinander verschieden sind, da jede derselben auf $\binom{r-s+d}{r-s}$ Arten erhalten wird. Infolgedessen gilt

$$D(r-s+d) = \frac{\left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-s} D'(d)}{\binom{r-s+d}{r-s}}$$

---

[3]) Man kann auch $\omega = r - s - 1$ setzen, wie in II, Formel (7) geschehen ist.

[4]) Die Analogie mit II, § 2, Nr. 2 ist insofern nicht vollkommen gewahrt, als dort d_λ als die Anzahl der *nicht* durch p teilbaren $A_\lambda^{(\mu)}$ definiert worden ist.

oder

$$D(\beta) = \frac{\left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-s} D'(\beta - r + s)}{\binom{\beta}{r-s}} \tag{7}$$

mit $\beta = r - s, \ldots, r$. Übrigens tritt in (6) die vermittelst (7) feststellbare Zahl $D(r-s)$ gar nicht als Anfangswert auf.

3. Ebenso wie die linearen sollen auch die P-Systeme auf eine *kanonische* Form gebracht werden. Zuvor werde bemerkt, daß, falls x eine $N^{(h)}(p)$-Zahl und α zu $p-1$ teilerfremd ist, auch x^α eine $N^{(h)}(p)$-Zahl ist. Nunmehr ergebe sich durch Auflösung von (4) nach $x_1, \ldots, x_s$, wozu, wie bereits bemerkt, nur Multiplikationen bzw. Potenzerhebungen erforderlich sind, das System

$$x_i \prod_{l=1}^{r-s} x_{s+l}^{e'_{il}} \equiv a'_i \bmod p \quad (i = 1, \ldots, s).$$

Dabei hat die in der vollständigen Exponentenmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 & e'_{11} & \ldots & e'_{1,r-s} \\ 0 & 1 \ldots 0 & e'_{21} & \ldots & e'_{2,r-s} \\ \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot & \ldots & \cdot \\ 0 & 0 \ldots 1 & e'_{s1} & \ldots & e'_{s,r-s} \end{pmatrix}$$

enthaltene Teilmatrix (e'_{il}) die Eigenschaft, *vollständig prim* mod $p-1$ zu sein, d. h. *alle* vermittelst (e'_{il}) gebildeten Determinanten, wobei also die Reihenanzahl beliebig ist, sind relativ prim zu $p-1$, insbesondere alle e'_{il} selbst. Offenbar ist die Anzahl sämtlicher s-reihigen Determinanten der vollständigen Exponentenmatrix um 1 größer als die Anzahl *aller* vermittelst (e'_{il}) gebildeten Determinanten in Übereinstimmung mit der Relation

$$1 + \sum_{\nu=1,\ldots,s} \binom{s}{\nu}\binom{r-s}{\nu} = \binom{r}{s}.$$

Vermöge der Substitution

$$y_i \equiv x_i^{e''_{i1}} \bmod p \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

$$y_{s+l} \equiv x_{s+l}^{e'_{1l} e''_{11}} \bmod p \qquad (l = 1, \ldots, r-s),$$

wo die e''_{i1} der Kongruenz

$$e'_{i1} e''_{i1} \equiv 1 \bmod p - 1$$

genügen, also die e''_{i1} zu $p-1$ teilerfremd und somit entsprechende x und y zugleich $R^{(h)}(p)$-Zahlen bzw. zugleich $N^{(h)}(p)$-Zahlen sind, erhält man die *kanonische* Darstellung

$$y_i \prod_{l=1}^{r-s} y_{s+l}^{\eta_{il}} \equiv b_i \bmod p$$

mit der Teilmatrix (η_{il}), die ebenfalls vollständig prim mod $p-1$ ist und für die überdies gilt

$$\eta_{il} \equiv 1 \bmod p - 1 \qquad (i = 1 \text{ oder } l = 1)$$

und sonst

$$\eta_{il} \not\equiv 1 \bmod p - 1.$$

Von besonderem Interesse sind die Fälle $s = 1$ bzw. $s = r - 1$, für die (4) bei kanonischer Darstellung übergeht in

$$\prod_{k=1}^{r} y_k \equiv b \mod p$$

bzw.

$$y_i y_r \equiv b_i \mod p \qquad (i = 1, \ldots, s).$$

§ 3. Spezielle *P*-Systeme [5]).

1. In bezug auf das System

$$\prod_{k=1}^{r} x_k^{e_{ik}} \equiv a_i \equiv g^{e_i} \mod p \tag{8}$$

werde vorausgesetzt, daß sämtliche $E_\lambda^{(\mu)}$ durch h teilbar sind. Dann gilt

$$d_1 = \ldots = d_{\binom{r}{s}} = s$$

und somit

$$D'(0) = \ldots = D'(s-1) = 0, \; D'(s) = \binom{r}{s};$$

$$D(r-s) = \ldots = D(r-1) = 0, \; D(r) = \left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-s}.$$

Gemäß (6) ergibt sich

$$\psi(p) = \left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-s} \sum_{\gamma=0}^{r-s} (-1)^\gamma \binom{r}{\gamma} (h^{r-s-\gamma} - 1). \tag{9}$$

Die obige Voraussetzung ist erfüllt, wenn jedes a_i eine $R^{(h)}(p)$-Zahl, d. h. jedes e_i durch h teilbar ist; das tritt insbesondere für das P-System

$$\prod_{k=1}^{r} x_k^{e_{ik}} \equiv 1 \mod p$$

ein, das im linearen Fall einem homogenen Kongruenzensystem entspricht.

2. In bezug auf (8) werde vorausgesetzt, daß sämtliche $E_\lambda^{(\mu)}$ *nicht* durch h teilbar sind [6]). Wegen

$$d_1 = \ldots = d_{\binom{r}{s}} = 0$$

findet statt

$$D'(0) = \binom{r}{s}, \; D'(1) = \ldots = D'(s) = 0;$$

$$D(r-s) = \left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-s} \binom{r}{s}, \; D(r-s+1) = \ldots = D(r) = 0.$$

Aus (6) folgt

$$\psi(p) = \left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-s} \sum_{\gamma=0}^{r-s} (-1)^\gamma \binom{r}{\gamma} h^{r-s-\gamma}. \tag{10}$$

Die obige Voraussetzung ist verwirklicht, wenn die um die Spalte der e_i erweiterte Exponentenmatrix (e_{ik}) gleichmäßig vom Rang s mod $p-1$ oder mod h ist.

3. Hiernach läßt sich ohne weiteres die Lösungsanzahl für den Fall einer einzigen Kongruenz

$$\prod_{k=1}^{r} x_k^{e_k} \equiv a \equiv g^e \mod p \tag{11}$$

[5]) Die linearen Analoga sind bis auf eine Ausnahme in II, § 3 behandelt. Vgl. folgende Anm.

[6]) Das Analogon fehlt in II.

angeben. Je nachdem a eine $R^{(h)}(p)$-Zahl ist oder nicht, d. h. e teilbar durch h ist oder nicht, findet man nach (9) bzw. (10) die Relation

$$\psi(p) = \left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-1}\left(\frac{(h-1)^r - (-1)^r}{h} + (-1)^r D\right) \tag{12}$$

mit

$$D = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \text{für} \quad e \begin{cases} \equiv 0 \\ \not\equiv 0 \end{cases} \bmod h.$$

Ein Beispiel mag beigefügt werden. Die Kongruenz

$$xyzu \equiv 1 \mod 5$$

sei in quadratischen Nichtresten zu lösen. Es ist

$$p = 5, \quad h = 2, \quad r = 4, \quad e \equiv 0 \bmod h, \quad \text{d. h. } D = 1$$

und somit nach (12)

$$\psi(5) = 8.$$

Die Lösungen sind aus der folgenden Tabelle ersichtlich:

x	y	z	u
2	2	2	2
2	2	3	3
2	3	2	3
2	3	3	2
3	2	2	3
3	2	3	2
3	3	2	2
3	3	3	3

4. Es sei $s = 2$, also $r > 2$. Das Kongruenzensystem liege in der Form

$$\left.\begin{aligned} \prod_{k=1}^{r} x_k^{e} &\equiv a \equiv g^{e} \\ \prod_{k=1}^{r} x_k^{e'k} &\equiv a' \equiv g^{e'} \end{aligned}\right\} \bmod p \tag{13}$$

vor, wobei e_k und e_k' nicht zugleich mit $p-1$ denselben Teiler haben dürfen. Kommt es in bezug auf die Reihen

$$e_1 e', \ldots, e_r e'$$
$$e_1' e, \ldots, e_r' e$$

gerade q-mal vor, daß stattfindet

$$e_k e' \equiv e_k' e \bmod h,$$

so gilt

$$D'(0) = \binom{r-q}{2}, \quad D'(1) = q(r-q), \quad D'(2) = \binom{q}{2};$$

$$D(r-2) = \left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-2}\binom{r-q}{2}, \quad D(r-1) = \left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-2}\frac{q(r-q)}{r-1},$$

$$D(r) = \left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-2}\frac{\binom{q}{2}}{\binom{r}{2}}.$$

Ferner kann q nur die Werte 0 oder 1 oder r annehmen. Ist nämlich $e \equiv e' \equiv 0 \bmod h$, so ist $q = r$. Ist dagegen $e' \not\equiv 0 \bmod h$, so würde aus

$$\left.\begin{aligned} e_{k_1} e' &\equiv e'_{k_1} e \\ e_{k_2} e' &\equiv e'_{k_2} e \end{aligned}\right\} \bmod h \qquad (k_1 \neq k_2)$$

folgen, daß $e_{k_1} e'_{k_2} - e_{k_2} e'_{k_1}$ nicht relativ prim zu $p-1$, also die Exponentenmatrix von (13) nicht gleichmäßig vom Rang 2 mod $p-1$ wäre. Ersetzt man noch $\psi(p)$ durch $\psi(p; q)$, so ergibt (6)

$$\psi(p; 0) = \left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-2} \sum_{\gamma=0}^{r-2} (-1)^\gamma \binom{r}{\gamma} h^{r-2-\gamma},$$

$$\psi(p; 1) = \left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-2} \left(\sum_{\gamma=0}^{r-2} (-1)^\gamma \binom{r}{\gamma} h^{r-2-\gamma} - \sum_{\alpha=0}^{r-2} (-1)^\alpha \binom{r-1}{\alpha} \right),$$

$$\psi(p; r) = \left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-2} \left(\sum_{\gamma=0}^{r-2} (-1)^\gamma \binom{r}{\gamma} h^{r-2-\gamma} - \sum_{\alpha=0}^{r-2} (-1)^\alpha \binom{r}{\alpha} \right)$$

oder zusammengefaßt

$$(14) \qquad \psi(p; q) = \left(\frac{p-1}{h}\right)^{r-2} \left(\frac{(h-1)^r + (-1)^r hr - (-1)^r}{h^2} - (-1)^r q + (-1)^r \binom{q}{r} \right).$$

Die Werte für $\psi(p; 0)$ bzw. $\psi(p; r)$ folgen natürlich auch aus (10) bzw. (9).

5. Der Behandlung eines weiteren Sonderfalles schicken wir eine Bemerkung voraus. Bei der Multiplikation als Verknüpfung bildet das verkürzte Restklassensystem mod p eine Abelsche Gruppe G von der Ordnung $p-1$, in bezug auf welche das System H der Klassen der h-ten Potenzreste eine *ausgezeichnete Untergruppe* von der Ordnung $\frac{p-1}{h}$ ist. Die h Elemente der *Faktorgruppe* von G nach H mögen als *Komplexe*, insbesondere H als *Hauptkomplex*, die übrigen als *Nebenkomplexe* bezeichnet werden.

Nunmehr liege für $s = r-1$ das Kongruenzensystem (4) in der kanonischen Darstellung

$$(15) \qquad x_i x \equiv b_i \bmod p \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

vor. Offenbar weist das erweiterte System

$$x_i x \equiv b_i \qquad (i = 1, \ldots, s+1;\ b_{s+1} \equiv 1)$$

dieselbe Anzahl von $N^{(h)}(p)$-Lösungen auf wie (15).

Gehören dann b_m und b_n demselben Komplex an, so gilt dasselbe von x_m und x_n und umgekehrt; in diesem Fall kann die m-te oder n-te Kongruenz des erweiterten Systems entfernt werden, ohne daß sich die Anzahl der $N^{(h)}(p)$-Lösungen ändert. Verteilen sich also die $s+1$ Restklassen b_i auf σ verschiedene Komplexe

$$c_1, \ldots, c_\sigma \qquad (c_\sigma \equiv 1;\ 1 \leqq \sigma \leqq h),$$

so besitzt auch das System

$$(16) \qquad x_i x \equiv c_i \qquad (i = 1, \ldots, \sigma)$$

dieselbe Anzahl von $N^{(h)}(p)$-Lösungen wie (15). Die Bestimmung der Anfangswerte $D(\beta)$ in bezug auf (16) geschieht folgendermaßen. Gehört von den Unbestimmten x und x_σ eine dem Hauptkomplex an, dann wegen $x x_\sigma \equiv 1$ auch die andere; überdies gehört dann keine der übrigen $\sigma - 1$ Unbestimmten dem Hauptkomplex an. Gehört andererseits x_i für ein von σ verschiedenes i dem Hauptkomplex an, dann gilt dasselbe *nicht* für die übrigen σ Unbestimmten. Somit ist

$$D(1) = \frac{p-1}{h}(\sigma - 1), \qquad D(2) = \frac{p-1}{h}, \quad D(3) = \cdots = D(\sigma+1) = 0.$$

Nach (6) ergibt sich hiernach für die Anzahl der $N^{(h)}(p)$-Lösungen von (16) und damit auch von (15) der Ausdruck

$$\psi(p) = \frac{p-1}{h}(h - \sigma). \tag{17}$$

Wir schließen ein Beispiel an. Das System

$$\left.\begin{aligned} x_1 x &\equiv 1 \\ x_2 x &\equiv 9 \\ x_3 x &\equiv 12 \\ x_4 x &\equiv 7 \\ x_5 x &\equiv 6 \end{aligned}\right\} \bmod 13$$

sei in kubischen Nichtresten zu lösen. Es ist

$$p = 13, \quad h = 3.$$

Die zu 13 teilerfremden Zahlen verteilen sich auf die folgenden drei Komplexe:

1	5	8	12
2	10	3	11
4	7	6	9.

Danach ist

$$\sigma = 2, \quad \psi(13) = 4.$$

Die $N^{(3)}(13)$-Lösungen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
2	7	11	6	10	3
3	9	3	4	11	2
10	4	10	9	2	11
11	6	2	7	3	10

Bei großen Primzahlen kann sich die Bestimmung von $\sigma = \sigma(p, h)$ recht umständlich gestalten. In solchen Fällen wird eine wesentliche Vereinfachung des rechnerischen Apparates erzielt, wenn man in Verallgemeinerung eines von Herrn W. Weinreich angegebenen Verfahrens folgendermaßen vorgeht [7]). In bezug auf einen festen Modul h mögen sich die $s+1$ nicht notwendigerweise verschiedenen Zahlen

$$e_1, \ldots, e_{s+1} \tag{18}$$

auf σ Restklassen verteilen. Ordnet man die $\binom{s+1}{2}$ Differenzen

$$e_{mn} = e_m - e_n \; (m, n = 1, \ldots, s+1; \; m > n)$$

in der Form

	e_2	e_3	.	.	.	e_{s+1}	
e_1	e_{21}	e_{31}	.	.	.	$e_{s+1,1}$	ε_1
e_2		e_{32}	.	.	.	$e_{s+1,2}$	ε_2
.			.	.	.	.	.
.				.	.	.	.
e_s						$e_{s+1,s}$	ε_s

[7]) P. Stäckel, Die Lückenzahlen r-ter Stufe und die Darstellung der geraden Zahlen als Summen und Differenzen ungerader Primzahlen. Mit Beiträgen von W. Weinreich. Sitzungsber. d. Heidelb. Akad. d. Wissensch., III. Teil (1918), S. 16 ff.; außerdem P. Stäckel und W. Weinreich, Die Darstellung gerader Zahlen als Differenzen und Summen von Primzahlen, Abhandl. d. Heidelb. Akad. d. Wissensch. (1922), S. 14 ff. Vgl. auch II, S. 244.

an und ersetzt ε_i durch h, wenn wenigstens eine der Zahlen

$$e_{i+1,i},\ e_{i+2,i},\ \ldots,\ e_{s+1,i}$$

durch h teilbar ist, so gilt der *Satz*: Die Anzahl der nicht durch h ersetzten ε_i des Differenzenschemas stimmt mit $\sigma - 1$ überein.

Beweis: In jeder nicht leeren Restklasse mod h gibt es eine Zahl aus (18) mit größtem Stellenzeiger, die wir als A-Zahl der Klasse bezeichnen. Dabei ist e_{s+1} stets A-Zahl. Dann sind sowohl σ verschiedene Klassen als auch A-Zahlen vorhanden. Ist e_i eine A-Zahl ($i \leqq s$), also keine der Zahlen

$$e_{i+1},\ \ldots,\ e_{s+1} \tag{19}$$

gleichrestig mod h mit e_i, so ist ε_i nicht durch h ersetzt. Ist umgekehrt ε_i nicht durch h ersetzt, so ist keine der Zahlen (19) gleichrestig mod h mit e_i und somit e_i eine A-Zahl. Unter Berücksichtigung der A-Zahl e_{s+1}, der im obigen Schema kein ε_i entspricht, ergibt sich hiernach die im Satz behauptete Übereinstimmung.

Um dieses Verfahren in unserem Fall anzuwenden, setzen wir (gegebenenfalls unter Verwendung von Indizestabellen)

$$b_i \equiv g^{e_i} \mod p$$

und beachten, daß b_m und b_n dann und nur dann demselben Komplex angehören, wenn gilt

$$e_m - e_n \equiv 0 \mod h;$$

die b_i verteilen sich also auf ebensoviele Komplexe wie die e_i auf Restklassen mod h.

Für das eben behandelte Beispiel möge σ nach dem Weinreichschen Verfahren bestimmt werden. Als primitive Wurzel mod 13 wählen wir $g = 6$. Die b_i und die zugehörigen e_i sind nachstehend zusammengestellt:

i	1	2	3	4	5	6
b_i	1	9	12	7	6	1
e_i	0	4	6	7	1	0.

Für $h = 3$ erhalten wir das Differenzenschema

	4	6	7	1	0	
0	4	6	7	1	0	3
4		2	3	− 3	− 4	3
6			1	− 5	− 6	3
7				− 6	− 7	3
1					− 1	ε_5

und daraus $\sigma - 1 = 1$ im Einklang mit dem vorhin auf anderem Weg gefundenen Wert für σ.

Barmen den 18. Februar 1929.

Eingegangen 20. Juli 1930.

Zur Theorie der reellen Verzweigungen von Lösungen nichtlinearer Integralgleichungen.

Von *Rudolf Iglisch* in Aachen.

Inhalt.

§ 1. Ziel der Arbeit 151
§ 2. Das allgemeine Formelsystem 153
§ 3. Der einfachste Fall 156
§ 4. Ein andersartiger Spezialfall bei $n = 2$ 159
§ 5. Die Berechnung der Ableitungen der L-Größen 161
§ 6. Der Fall $n = 2$, $a_2(t) \not\equiv 0$, $\Delta = 0$. Bemerkungen zum allgemeinen Fall bei $n = 2$ 165
§ 7. Erweiterung der Untersuchungen auf beliebiges n 166
§ 8. Die erste Randwertaufgabe von $\Delta u + \mathfrak{Sin}\, u = 0$. 169

§ 1. Ziel der Arbeit.

In einer Veröffentlichung in den Mathem. Annalen [1]) habe ich die nichtlineare Integralgleichung

$$w(s) + \frac{1}{2\pi}\int G(s,t)\, H(w(t), t)dt = h(s) \tag{1}$$

auf reelle Lösungen in der Nachbarschaft einer bekannten reellen Lösung $w(s)$ untersucht. Dabei bedeutet $H(w(t), t)$ eine in w analytische Funktion; die Variablen s und t können von beliebiger Dimension sein und durchlaufen einen gewissen Bereich $\mathfrak{B}$, über den sämtliche in dieser Arbeit auftretenden Integrale erstreckt werden; $G(s, t)$ sei ein brauchbarer symmetrischer Kern. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, daß die Ausgangslösung $w_0(s) \equiv 0$ ist zur rechten Seite $h_0(s) \equiv 0$, so daß also nur Lösungen $w(s)$ mit $|\, w(s)\,| < \varepsilon$ betrachtet werden zu rechten Seiten $h(s)$ mit $|h(s)| < \delta$; δ und ε sind dabei zwei geeignet gewählte genügend kleine Zahlen. Die Funktion H ist von der Form

$$H(w(t), t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu(t)\, w^\nu(t)\,. \tag{2}$$

Wir wollen, wie dies in der Schmidtschen Theorie immer geschieht, $a_1(t) \not\equiv 0$ voraussetzen. In der schon erwähnten Arbeit, deren Bezeichnungen im folgenden stets benutzt werden sollen, wurde zunächst der Fall erledigt, daß die homogene lineare Integralgleichung

$$\varphi(s) + \frac{1}{2\pi}\int G(s,t)\, a_1(t)\varphi(t)dt = 0 \tag{3}$$

[1]) Reelle Lösungsfelder der elliptischen Differentialgleichung $\Delta u = F(u)$ und nichtlinearer Integralgleichungen, Math. Ann. Bd. **101** (1929), S. 98.

nur die triviale Lösung $\varphi \equiv 0$ besitzt, d. i. der sogenannte Hauptfall, und ferner der Fall, daß (3) genau eine bis aufs Vorzeichen bestimmte normierte Eigenfunktion $\varphi_0(s)$ besitzt. In der vorliegenden Arbeit wollen wir die Gleichung (1) untersuchen unter der Voraussetzung, daß (3) n voneinander unabhängige normierte Eigenfunktionen

$$\varphi_1(s),\ \varphi_2(s),\ \ldots,\ \varphi_n(s)$$

aufweist. Es sei hier gleich bemerkt, daß wir die normierten Eigenfunktionen der zu (3) adjungierten Gleichung

$$(4) \qquad \psi(s) + \frac{a_1(s)}{2\pi}\int G(t, s)\,\psi(t)\,dt = 0$$

mit

$$\psi_1(s),\ \psi_2(s),\ \ldots,\ \psi_n(s)$$

bezeichnen werden. Die Funktionen $\varphi_\nu(s)$ werden wir im allgemeinen als zueinander orthogonal voraussetzen, von den $\psi_\nu(s)$ werden wir nur verlangen, daß sie voneinander unabhängig sind.

Über diesen Gegenstand, nämlich die Diskussion der Verzweigungen im Falle mehrerer Lösungen der Schmidtschen homogenen Gleichung, sind mir nur zwei Untersuchungen bekannt geworden. Die Arbeit von E. Schmidt: Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen" (Math. Ann. Bd. **65** (1908), S. 370) betrachtet die Lösungen von (1) im Komplexen ohne Untersuchung über ihre Realität; die daran anschließende Dissertation von Hans Falckenberg [2]) behandelt nur die spezielle elliptische Differentialgleichung $\Delta u + \mathfrak{Sin}\, u = 0$ (erste Randwertaufgabe).

Der Hauptgedanke der vorliegenden Arbeit ist der, daß für eine fest vorliegende Funktion $h(s)$ auf der rechten Seite von (1) in den bei E. Schmidt auftretenden n Verzweigungsgleichungen für die n Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ durch Wahl der in weitem Maße willkürlichen Kerntransformationsfunktionen $p_\nu(s)$ und $q_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ $n - 1$ dieser Parameter zu Null transformiert und auch sonst noch einige Vereinfachungen der Gleichungen erreicht werden. Der Fall $n = 2$ kann auf diesem Wege in weitestem Umfange erledigt werden (§§ 3 bis 6); im Falle eines beliebigen n (§ 7) stößt man auf einige Schwierigkeiten, da Systeme algebraischer Gleichungen höherer Ordnung mit mehreren Unbekannten auf reelle Lösungen untersucht werden müßten, was bisher in allgemeinster Weise wohl noch nicht möglich ist. Doch wird man in vielen Fällen auch bei $n > 2$ auf dem hier angegebenen Wege zum Ziel kommen. So wird in § 8 das spezielle Beispiel der von H. Falckenberg untersuchten Gleichung $\Delta u + \mathfrak{Sin}\, u = 0$ [3]) restlos durchgeführt werden. Die dabei angestellten Überlegungen reichen natürlich zur Erledigung auch allgemeinerer nichtlinearer Integralgleichungen aus. — Da die allgemeinen theoretischen Ergebnisse der Arbeit bei weitem vielgestaltiger sind als in dem früher erledigten Falle $n = 1$, muß an dieser Stelle auf eine Zusammenstellung derselben verzichtet und der Leser auf das Studium der einzelnen Paragraphen verwiesen werden. Dabei sei noch einmal betont, daß die vorliegenden Untersuchungen nur eine — einfach zu handhabende — Methode angeben wollen, ein konkret vorgegebenes Ver-

---

[2]) H. Falckenberg, Verzweigungen von Lösungen nichtlinearer Differentialgleichungen, Inaug. Dissert. Erlangen 1912.

[3]) Schon vor längerer Zeit machte mich Frl. E. Noether freundlicherweise darauf aufmerksam, daß sich in der Falckenbergschen Arbeit eine Lücke befindet. Der Schluß im dortigen § 7 nämlich, daß auch bei *mehreren* Variablen, also gerade in dem uns jetzt interessierenden Fall $n > 1$, zwischen zwei Nullstellen notwendig ein Extremum liegt, ist durch nichts gerechtfertigt. In der vorliegenden Arbeit wird das von Falckenberg ausgesprochene Resultat in aller Strenge bewiesen werden.

zweigungsproblem zu lösen; eine Vertiefung der algebraischen Eliminationstheorie, die allein zu allgemeineren Resultaten führen könnte, wird nicht angestrebt und dürfte auch kaum hinsichtlich der Anwendungen der Theorie in der Physik im Vordergrunde des Interesses stehen.

§ 2. Das allgemeine Formelsystem.

Genau wie in § 4 meiner eingangs zitierten Arbeit gelangt man unter Einführung des Kernes

$$E(s,t) = \frac{a_1(t)}{2\pi} G(s,t) + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu(s)\, q_\nu(t), \tag{5}$$

zu dem der lösende Kern $\mathsf{E}(s,t)$ gehören möge, zu der mit (1) gleichwertigen Integralgleichung

$$w(s) = \gamma(s) + \int K(s,t) \sum_{\nu=2}^{\infty} a_\nu(t)\, w^\nu(t)\, dt. \tag{6}$$

Dabei sind die $p_\nu(s)$ und $q_\nu(t)$ beliebige Funktionen, die nur den Bedingungen

$$D_1 \equiv \begin{vmatrix} (p_1, \psi_1) & (p_1, \psi_2) & \dots & (p_1, \psi_n) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ (p_n, \psi_1) & (p_n, \psi_2) & \dots & (p_n, \psi_n) \end{vmatrix} \neq 0, \tag{7}$$

$$D_2 \equiv \begin{vmatrix} (q_1, \varphi_1) & (q_1, \varphi_2) & \dots & (q_1, \varphi_n) \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ \cdot & & & \\ (q_n, \varphi_1) & (q_n, \varphi_2) & \dots & (q_n, \varphi_n) \end{vmatrix} \neq 0 \tag{7'}$$

zu genügen brauchen, wo wie üblich

$$(p_\nu, \psi_\mu) \equiv \int p_\nu(s)\, \psi_\mu(s)\, ds$$

bedeutet. Ferner ist gesetzt:

$$\gamma(s) = \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_\nu(s)\, \lambda_\nu + \beta(s), \tag{8}$$

$$\lambda_\nu = \int q_\nu(t)\, w(t)\, dt \quad (\nu = 1, 2, \dots, n), \tag{9}$$

$$\alpha_\nu(s) = p_\nu(s) + \int \mathsf{E}(s,r)\, p_\nu(r)\, dr, \tag{10}$$

$$\beta(s) = h(s) + \int \mathsf{E}(s,t)\, h(t)\, dt, \tag{11}$$

$$K(s,t) = -\frac{1}{2\pi}\{G(s,t) + \int \mathsf{E}(s,r)\, G(r,t)\, dr\}. \tag{12}$$

Man löse jetzt wie in meiner oben zitierten Arbeit nach der Schmidtschen Methode (6) formal nach $w(s)$ auf, d. h. man setze

$$w_1(s) = \gamma(s) \tag{13}$$

und berechne $w_\varrho(s)$, indem man $\sum_{\sigma=1}^{\varrho-1} w_\sigma(s)$ in (6) auf der rechten Seite für $w(s)$ einträgt und nur die Glieder ϱ-ten Grades in $\gamma(s)$ beibehält. Dann wird

$$w(s) = \sum_{\varrho=1}^{\infty} w_\varrho(s). \tag{14}$$

Jedes $w_\varrho(s)$ ist homogen von ϱ-ter Ordnung in den $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ und $\beta(s)$.

Setzt man (14) in die n Gleichungen (9) ein, so erhält man n Gleichungen für die n Parameter $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, die sog. Schmidtschen Verzweigungsgleichungen. Sie haben die Form

$$\lambda_\varrho = \sum_{\nu=1}^{n} (q_\varrho, \alpha_\nu)\lambda_\nu + (q_\varrho, \beta) + \int q_\varrho(s) \sum_{\sigma=2}^{\infty} w_\sigma(s)\, ds. \tag{15}$$

Wir wollen nun einige der bisher eingeführten Funktionen vereinfachen. Zunächst folgt aus (10)

$$p_\nu(s) = \alpha_\nu(s) + \int E(s, r)\,\alpha_\nu(r)\, dr,$$

$$p_\nu(s) = \alpha_\nu(s) + \frac{1}{2\pi}\int G(s, t) a_1(t)\,\alpha_\nu(t)\, dt + \sum_{\varrho=1}^{n} p_\varrho(s)(q_\varrho, \alpha_\nu),$$

$$\alpha_\nu(s) + \frac{1}{2\pi}\int G(s, t) a_1(t)\alpha_\nu(t)\, dt = p_\nu(s) - \sum_{\varrho=1}^{n} p_\varrho(s)(q_\varrho, \alpha_\nu). \tag{16}$$

Da (16) lösbar sein muß, erhalten wir durch Multiplikation der ν-ten Gleichung mit $\psi_1(s)$ bzw. $\psi_2(s)$ ... bzw. $\psi_n(s)$ und Integration das folgende Gleichungssystem:

$$-\sum_{\varrho \neq \nu}^{1 \cdots n} (p_\varrho, \psi_\sigma)(q_\varrho, \alpha_\nu) + (p_\nu, \psi_\sigma)(1 - (q_\nu, \alpha_\nu)) = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, \ldots, n),$$

dessen Determinante mit D_1 übereinstimmt, also nicht verschwindet. Daher erhält man

$$(q_\nu, \alpha_\nu) = 1, \quad (q_\nu, \alpha_\mu) = 0 \quad (\mu \neq \nu). \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{17}$$

Dieses Resultat nebst Ableitung findet sich schon bei E. Schmidt.

Die Verzweigungsgleichungen (15) vereinfachen sich jetzt zu

$$0 = (q_\varrho, \beta) + \int q_\varrho(s) \sum_{\sigma=2}^{\infty} w_\sigma(s)\, ds. \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n). \tag{18}$$

Aus (16) folgt mit Benutzung von (17)

$$\alpha_\nu(s) + \frac{1}{2\pi}\int G(s, t) a_1(t)\alpha_\nu(t)\, dt = 0;$$

daher ist $\alpha_\nu(s)$ eine Eigenfunktion von (3), also von der Gestalt

$$\alpha_\nu(s) = \sum_{\mu=1}^{n} \sigma_{\nu\mu}\varphi_\mu(s). \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{19}$$

Die $\sigma_{\nu\mu}$ bestimmen sich eindeutig durch Einsetzen von (19) in (17):

$$\sum_{\mu=1}^{n} (q_\varrho, \varphi_\mu)\sigma_{\nu\mu} = \begin{cases} 0 \text{ für } \varrho \neq \nu \\ 1 \text{ für } \varrho = \nu \end{cases} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n); \tag{20}$$

denn die Determinante dieses Gleichungssystems ist $D_2 \neq 0$.

Auf ähnliche Weise kann man die in den Verzweigungsgleichungen (18) auftretenden Ausdrücke (q_ϱ, β) bestimmen. Es ist nach (11)

$$(q_\varrho, \beta) = \int q_\varrho(s)[h(s) + \int \mathsf{E}(s, t) h(t)\, dt]\, ds = (h, z_\varrho) \tag{21}$$

mit

$$z_\varrho(s) = q_\varrho(s) + \int \mathsf{E}(t, s) q_\varrho(t)\, dt. \tag{22}$$

Daraus folgt durch Auflösung

$$q_\varrho(s) = z_\varrho(s) + \frac{a_1(s)}{2\pi}\int G(t, s)\, z_\varrho(t)\, dt + \sum_{\nu=1}^{n} q_\nu(s)(p_\nu, z_\varrho),$$

$$z_\varrho(s) + \frac{a_1(s)}{2\pi}\int G(t, s)\, z_\varrho(t)\, dt = q_\varrho(s)\,(1 - (p_\varrho, z_\varrho)) - \sum_{\nu \neq \varrho}^{1 \cdots n} q_\nu(s)(q_\nu, z_\varrho). \tag{23}$$

Genau so, wie aus (16) sich (17) ergab, folgt aus (23)

$$(p_\varrho, z_\varrho) = 1, \quad (p_\nu, z_\varrho) = 0 \text{ für } \nu \neq \varrho. \tag{24}$$

Daher erhält man analog (19)

$$z_\nu(s) = \sum_{\mu=1}^{n} \chi_{\nu\mu}\, \psi_\mu(s), \tag{25}$$

wo die $\chi_{\nu\mu}$ sich durch Einsetzen von (25) in (24) bestimmen:

$$\sum_{\mu=1}^{n} (p_\varrho, \psi_\mu)\chi_{\nu\mu} = \begin{cases} 0 \text{ für } \varrho \neq \nu \\ 1 \text{ für } \varrho = \nu \end{cases} \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n). \tag{26}$$

Ist $a_\varkappa(t)$ der erste nicht identisch verschwindende Koeffizient der Entwicklung (2), so sind die noch nicht erledigten Glieder niedrigster Ordnung in den Verzweigungsgleichungen (18)

$$(q_\varrho, w_\varkappa) = \iint q_\varrho(s)\, K(s, t)\, a_\varkappa(t)\gamma^\varkappa(t)\, dt\, ds. \tag{27}$$

Es ist also von Nutzen, die Ausdrücke

$$N_\varrho(t) = \int q_\varrho(s)\, K(s, t)\, ds \tag{28}$$

zu studieren. Aus (12) folgt in gleicher Weise wie bisher

$$K(s, t) + \frac{1}{2\pi}\int G(s, r)\, a_1(r)\, K(r, t)\, dr = -\frac{1}{2\pi} G(s, t) - \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu(s)\, N_\nu(t). \tag{29}$$

Da (29) lösbar sein soll, folgt hieraus

$$\int \left[\frac{1}{2\pi} G(s, t) + \sum_{\nu=1}^{n} p_\nu(s)\, N_\nu(t)\right] \psi_\varrho(s)\, ds = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n),$$

d. h.

$$\sum_{\nu=1}^{n} (p_\nu, \psi_\varrho)\, N_\nu(t) = -\frac{1}{2\pi}\int G(s, t)\, \psi_\varrho(s)\, ds = \varkappa_\varrho \varphi_\varrho(t). \tag{30}$$

Die Richtigkeit der letzten Umformung sieht man in folgender Weise ein:

Es ist

$$\psi_\varrho(s) + \frac{a_1(s)}{2\pi}\int G(t, s)\, \psi_\varrho(t)\, dt = 0.$$

Ferner kann man schreiben

$$\varphi_\varrho(s) + \frac{1}{2\pi}\int G(s, t)\, a_1(t)\varphi_\varrho(t)\, dt = 0.$$

Also ist auch $a_1(s)\, \varphi_\varrho(s)$ eine Eigenfunktion von (4). Daher kann man

$$\psi_\varrho(s) = \varkappa_\varrho a_1(s)\, \varphi_\varrho(s) \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, n) \tag{31}$$

setzen, wo wegen der Normierungsbedingung

$$\varkappa_\varrho = \frac{1}{\sqrt{(a_1^2, \varphi_\varrho^2)}} \tag{32}$$

zu setzen ist. Die Funktionen (31) sind voneinander unabhängig, da das gleiche für die φ_ϱ gilt. Freilich brauchen sie nicht zueinander orthogonal zu sein, wenn dies für die φ_ϱ zutrifft.

Aus (30) ergibt sich jetzt

$$N_\nu(t) = \frac{1}{D_1}\begin{vmatrix} (p_1, \psi_1)\ (p_2, \psi_1)\ \ldots\ (p_{\nu-1}, \psi_1)\ \ \varkappa_1\varphi_1(t)\ (p_{\nu+1}, \psi_1)\ \ldots\ (p_n, \psi_1) \\ (p_1, \psi_2)\ (p_2, \psi_2)\ \ldots\ (p_{\nu-1}, \psi_2)\ \ \varkappa_2\varphi_2(t)\ (p_{\nu+1}, \psi_2)\ \ldots\ (p_n, \psi_2) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ (p_1, \psi_n)\ (p_2, \psi_n)\ \ldots\ (p_{\nu-1}, \psi_n)\ \ \varkappa_n\varphi_n(t)\ (p_{\nu+1}, \psi_n)\ \ldots\ (p_n, \psi_n) \end{vmatrix} \tag{33}$$

$$= \sum_{\varrho=1}^{n} \varkappa_\varrho A_{\varrho\nu}^{(1)} \varphi_\varrho(t),$$

wenn $A_{\varrho\nu}^{(1)}$ die zum Element der ϱ-ten Zeile und ν-ten Spalte von D_1 gehörende Adjunkte bedeutet.

Aus (33) folgt z. B., daß $N_\nu(t)$ gegen eine Abänderung der Funktionen $q_1(t)$, $q_2(t), \ldots, q_n(t)$ unempfindlich ist.

Es entsteht nun die erste Aufgabe, die Funktionen p_ν und q_ν möglichst günstig zu wählen. Entsprechend den Arbeiten anderer Autoren, die sich an den Fall anschließen, daß (3) genau eine normierte Eigenfunktion besitzt [4]), wird man versucht sein, das Formelsystem durch Wahl von

(34) $$q_\nu = \varphi_\nu, \; p_\nu = \psi_\nu = \varkappa_\nu a_1 \varphi_\nu$$

(wegen (31)) zu vereinfachen. Man erhält dann

(7) $$D_2 = 1,$$

(19′) $$\alpha_\nu(s) = \varphi_\nu(s);$$

setzt man überdies, was meist geschieht, noch voraus, daß die homogene lineare Integralgleichung (3) einen symmetrischen Kern besitzt — also, weil $G(s, t)$ symmetrisch vorausgesetzt war, $a_1(s) = \text{Const.}$ —, so hat man weiter $\psi_\nu = \varphi_\nu$, daher

(7″) $$D_1 = 1,$$

(21′) $$(q_\varrho, \beta) = (h, \psi_\varrho),$$

(33′) $$N_\nu(t) = \varkappa_\nu \varphi_\nu(t) \text{ mit } \varkappa_\nu \text{ aus (32)}.$$

Mit Hilfe dieser Ausdrücke ergeben sich in der Verzweigungsgleichung (18) wohl einige Vereinfachungen, zur Aufstellung allgemeiner Sätze scheint diese Wahl der p_ν und q_ν jedoch nicht besonders geeignet.

§ 3. Der einfachste Fall.

Wir wollen in diesem Paragraphen die Annahme machen, daß die homogene lineare Integralgleichung (3) nur zwei unabhängige Eigenfunktionen besitzt ($n = 2$). Ferner sei zunächst in der Entwicklung (2) $a_2(t) \not\equiv 0$. Analog wie in § 4 meiner in Anm. [1]) zitierten Arbeit betrachte ich jetzt nur solche rechten Seiten

(35) $$h(s) = \mu \cdot k(s)$$

in (1), für die $k(s)$ nicht gleichzeitig zu $\psi_1(s)$ und $\psi_2(s)$ orthogonal ist.

Als Funktion $\psi_2(s)$ wähle ich die bis aufs Vorzeichen eindeutig bestimmte normierte Eigenfunktion von (4), die zu $k(s)$ orthogonal ist:

(36) $$(k, \psi_2) = 0.$$

$\varphi_2(s)$ wird dann gemäß (31) festgelegt, $\varphi_1(s)$ orthogonal dazu, und schließlich $\psi_1(s)$ wieder gemäß (31). Als Kerntransformationsfunktionen $p_\nu(s)$ wähle ich

(37) $$p_1(s) = k(s), \quad p_2(s) = \varrho \psi_2^*(s),$$

wo $\psi_2^*(s)$ die durch $(\psi_2^*, \psi_1) = 0$, $(\psi_2^*, \psi_2) = 1$ eindeutig festgelegte Eigenfunktion von (4) ist und der reelle Zahlenfaktor ϱ etwa so gewählt sei, daß $D_1 = 1$ wird (was natürlich auch durch einen Faktor bei k erreichbar ist). Dann ist wegen (21) und (24)

(38) $$(q_1, \beta) = \mu(k, z_1) = \mu, \quad (q_2, \beta) = \mu(k, z_2) = 0,$$

und zwar unabhängig von der Wahl von q_1 und q_2, die durch folgende Überlegung festgelegt werden sollen:

[4]) Vgl. z. B. L. Lichtenstein, Monatsh. f. Math. u. Phys. 28 (1917), S. 3, Math. Zeitschr. 7 (1920), S. 126.

Angenommen, die Gleichung (1) habe zu der festen rechten Seite (35) eine reelle Lösung $w(s)$. Dann setze ich $q_2(s)$ gleich einer normierten Eigenfunktion von (3), die zu diesem $w(s)$ orthogonal ist. Solche Funktionen gibt es sicher, und zwar mindestens zwei sich nur durchs Vorzeichen unterscheidende. $q_1(s)$ sei die zu dem gewählten $q_2(s)$ orthogonale normierte Eigenfunktion von (3). Diese Wahl ist zulässig, da sicher in (7′) $D_2 \neq 0$ ausfällt.

Durch die Wahl von q_2 ist wegen (9) $\lambda_2 = 0$ gemacht worden, so daß jetzt die beiden Verzweigungsgleichungen (18) zwei Gleichungen mit einer einzigen Variablen $\lambda_1 + \mu$ werden. Sie können in folgender Form angeschrieben werden:

$$0 = \mu + \sum_{\nu=2}^{\infty} L_\nu^{(1)} (\lambda_1 + \mu)^\nu,$$
$$0 = 0 + \sum_{\nu=2}^{\infty} L_\nu^{(2)} (\lambda_1 + \mu)^\nu. \tag{39}$$

Dabei ist z. B.

$$L_2^{(1)} = \int N_1(t)\, a_2(t)\, \alpha_1^2(t)\, dt = \frac{\varkappa_1}{(k,\ \psi_1)} \int \varphi_1(t)\, a_2(t)\, \alpha_1^2(t)\, dt.$$
$$L_2^{(2)} = \int N_2(t)\, a_2(t)\, \alpha_1^2(t)\, dt = \varkappa_2 (k,\ \psi_1) \int \varphi_2(t)\, a_2(t)\, \alpha_1^2(t)\, dt. \tag{40}$$

Umgekehrt entsteht, wenn w und damit $q_1(t)$ und $q_2(t)$ noch nicht bekannt sind, die Aufgabe, $q_1(t)$ und $q_2(t)$ so zu wählen, daß die beiden Gleichungen (39), bei denen die q_ν in den L-Größen stecken, erfüllt sind, wodurch dann $\lambda_2 = 0$ von selbst erreicht ist. Bei festem $k(s)$ sind $p_1(s)$ und $p_2(s)$ fest gewählt. $L_2^{(2)}$ ist, da wegen (33) $N_2(t)$ nicht von der Wahl von $q_1(t)$ und $q_2(t)$ abhängt, von zweitem Grade in $\alpha_1(t) = \sigma_{11}\, \varphi_1(t) + \sigma_{12}\, \varphi_2(t)$, also eine Form zweiten Grades in σ_{11} und σ_{12}. *Ist nun $L_2^{(2)}$ eine definite Form in σ_{11} und σ_{12},* die also nur für $\sigma_{11} = \sigma_{12} = 0$ verschwindet, *so besitzt Gleichung* (1) *bei genügend kleinem μ beiderlei Vorzeichens keine reelle Lösung.* Hierbei ist die leicht einzusehende Tatsache benutzt, daß die Schmidtsche Konvergenzschranke für die Verzweigungsgleichungen für alle Paare orthogonaler normierter Eigenfunktionen von (3) als Kerntransformationsfunktionen $q_1(t)$ und $q_2(t)$ eine wesentlich positive untere Grenze besitzt, usw. Ferner benötigt man die Bemerkung, daß σ_{11} und σ_{12} nicht beide beliebig klein ausfallen, was unmittelbar aus (17) und (19) ersichtlich ist. Aus (17) folgt überdies, daß, wenn $q_1(t)$ und $q_2(t)$ zueinander orthogonale normierte Eigenfunktionen von (3) sind,

$$\alpha_1(t) = q_1(t),\ \alpha_2(t) = q_2(t) \tag{41}$$

ist. Ist umgekehrt $\alpha_1(t)$ eine normierte Eigenfunktion von (3) — dieser Bedingung wollen wir $\alpha_1(t)$ künftighin immer unterwerfen — so setze man $q_1(t) = \alpha_1(t)$, und $q_2(t) = \alpha_2(t)$ sei die bis aufs Vorzeichen bestimmte zu $\alpha_1(t)$ orthogonale normierte Eigenfunktion. Die Zweideutigkeit des Vorzeichens ist auf unsere Überlegungen ohne Einfluß. $q_2(t)$ ist eindeutig festgelegt, wenn man etwa noch $D_2 > 0$ verlangt.

Die Diskriminante von $L_2^{(2)}$ ist, bis auf einen unwesentlichen positiven Faktor,

$$\Delta = \left(\int a_2(t)\, \varphi_2^2(t)\, \varphi_1(t)\, dt\right)^2 - \int a_2(t)\, \varphi_2(t)\, \varphi_1^2(t)\, dt \cdot \int a_2(t)\, \varphi_2^3(t)\, dt. \tag{42}$$

Ist für irgendein $k(s)$, durch das dann $\varphi_1(s)$ und $\varphi_2(s)$ festgelegt sind, $L_2^{(2)}$ definit, so muß also für diese $\varphi_1(s)$ und $\varphi_2(s)$ in (42) $\Delta < 0$ sein. Ist nun $\Delta > 0$, die quadratische Form $L_2^{(2)}$ also indefinit, so gibt es, abgesehen vom Vorzeichen, genau zwei voneinander verschiedene normierte Eigenfunktionen $\alpha_{11}(t)$ und $\alpha_{12}(t)$ [5]) von (3), die $L_2^{(2)}$ zum Verschwinden

[5]) Die hier benutzte Bezeichnungsweise durch fortgesetzt angefügte Indizes ist wohl allgemein verständlich.

bringen. Ich betrachte nur $\alpha_{11}(t)$ weiter, für $\alpha_{12}(t)$ verläuft die Betrachtung analog. Zu dem festgewählten $\alpha_{11}(t)$ ist nach (41) $q_{11}(t) = \alpha_{11}(t)$ eindeutig bestimmt, ebenso auch, nach der eben angegebenen Vorschrift, $q_{21}(t)$ als zweite Schmidtsche Kerntransformationsfunktion, wenn wir etwa noch wie früher $D_2 > 0$ verlangen; damit ist dann auch $\alpha_{21}(t) = q_{21}(t)$ festgelegt.

Ich will jetzt annehmen, daß der in (40) definierte Ausdruck $L_2^{(1)}$ für dieses $\alpha_{11}(t)$ von Null verschieden ausfällt, was wohl im Falle $a_2(t) \not\equiv 0$ bei der Mehrzahl der auftretenden Verzweigungsprobleme erfüllt sein wird. Dann hat im Falle sign $\mu =$ sign $L_2^{(1)}$ die erste Gleichung (39) keine genügend kleine reelle Wurzel, im Falle sign $\mu = -$ sign $L_2^{(1)}$ genau zwei. Setzt man diese beiden Wurzeln $\lambda_{111} + \mu$ und $\lambda_{112} + \mu$ neben $\lambda_{211} = \lambda_{212} = 0$ in (14) ein, so ist das entstehende $w_{111}(s)$ und $w_{112}(s)$ natürlich noch keine Lösung von (1), da die zweite Gleichung (39) nicht notwendig erfüllt ist. Man sieht aber leicht folgendes: Ändert man $\alpha_{11}(t)$ wenig ab, doch so, daß es immer normierte Eigenfunktion von (3) bleibt, so kann man erreichen, daß $L_2^{(2)}$ sowohl positives als auch negatives Zeichen annimmt, und zwar mit einem Betrage, der groß gegen $L_3^{(2)}\,(\lambda_1 + \mu)^3$ ist, während $L_2^{(1)}$ das gleiche Vorzeichen behält. Daraus folgt leicht: Bei festem genügend kleinen μ gibt es zwei Funktionen $\alpha_{111}(t, \mu)$ und $\alpha_{112}(t, \mu)$, dazu je ein $\lambda_{111}(\mu)$ bzw. $\lambda_{112}(\mu)$, daß dafür die beiden Gleichungen (39) Gültigkeit haben. Mit Hilfe von (14) erhält man dann zwei Lösungen $w_{111}(s, \mu)$ und $w_{112}(s, \mu)$ von (1). Wir notieren als Satz: *Ist für $\alpha_{11}(t)$ und $\alpha_{12}(t)$ $L_{21}^{(1)}$ und $L_{22}^{(1)}$ von Null verschieden, so gibt es für sign $L_{21}^{(1)} =$ sign $L_{22}^{(1)} =$ sign μ keine reelle Lösung, für sign $L_{21}^{(1)} =$ sign $L_{22}^{(1)} \neq$ sign μ 4 Lösungen bei genügend kleinem μ; bei sign $L_{21}^{(1)} \neq$ sign $L_{22}^{(1)}$ dagegen stets 2 reelle Lösungen bei beliebigem Vorzeichen von μ.* Diese reellen Lösungen sind übrigens bei verschwindendem μ in erster Näherung wegen (14), (13) und (8) paarweise von der Form Const. $\alpha_{11}(s)$ bzw. Const. $\alpha_{12}(s)$, ein Ergebnis, das natürlich im Falle $n = 1$ sein Analogon darin findet, daß dort jede zu $\mu \cdot h(s)$ mit $(h, \psi) \neq 0$ gehörende Lösung für $\mu \to 0$ in erster Näherung die Gestalt der Eigenfunktion $\varphi(s)$ besitzt [6]). — Daß es z. B. im Falle sign $\mu = -$ sign $L_2^{(1)}$ nicht mehr als zwei Lösungen geben kann, die in erster Näherung gleich Const. $\alpha_1(s)$ sind, folgt präzise so: Gäbe es drei solche Lösungen, so könnte man bei genügend kleinem μ ein $q_2(t)$ (jetzt allerdings nicht mehr notwendig als Eigenfunktion von (3), aber doch nicht viel von einer solchen verschieden) so wählen, daß es auf allen drei Lösungen orthogonal steht; es wäre also $\lambda_{21} = \lambda_{22} = \lambda_{23} = 0$. Dann wähle man etwa $q_1(t)$ gleich dem früher benutzten und stelle die beiden Verzweigungsgleichungen auf; diese haben wieder die Gestalt (39); aus der ersten dieser Gleichungen folgt dann, daß bei festem genügend kleinem μ nicht mehr als zwei Lösungen existieren können, da ja die Funktionen $q_1(t)$ und $q_2(t)$ schon fest gewählt sind.

Ich bemerke noch ausdrücklich, daß in den bisher diskutierten Fällen die Schranke für μ, unterhalb deren unsere Sätze gelten, mit dem Wert der Diskriminante Δ gegen Null strebt. In dem Falle, daß die Diskriminante (42) verschwindet, ist durch die bisherigen Untersuchungen nichts gesagt. Der Ausdruck (42) ist wesentlich abhängig von der Funktion $k(s)$ der rechten Seite $h(s) = \mu \cdot k(s)$ in (1); denn durch diese bestimmt sich $\varphi_2(s)$ (und damit auch $\varphi_1(s)$). Verschwindet nun Δ nicht identisch in φ_1 (und dem jeweils zugehörigen φ_2), so tritt der Fall $\Delta = 0$ nur bei gewissen Ausnahmefunktionen $k(s)$ ein, die wir hier von der Betrachtung ausschließen können, zumal ja schon gewisse $k(s)$ infolge

---

[6]) Vgl. die Formeln (62), (61), (59) und (76) meiner unter Anm. [1]) zitierten Arbeit.

der Bedingung $(k, \psi_1)^2 + (k, \psi_2)^2 \neq 0$ unberücksichtigt bleiben. Verschwindet Δ identisch, so muß eine andere Betrachtung durchgeführt werden, die in § 6 verwiesen ist; sie besteht übrigens auch für nicht identisch verschwindendes Δ zu Recht.

Es sei jetzt noch bemerkt, daß das gleichzeitige Verschwinden von $L_2^{(1)}$ und $L_2^{(2)}$, etwa für die Eigenfunktion $\alpha_{11}(t)$, ein Vorkommnis ist, das von der speziellen Wahl der Funktion $k(s)$ nicht abhängt. Denn durch Änderung von $k(s)$ werden in (40) nur $N_1(t)$ und $N_2(t)$ geändert, die sich als Eigenfunktionen von (3) beide linear durch die alten $\varphi_1(t)$ und $\varphi_2(t)$ ausdrücken lassen. Die Funktion $\alpha_{11}(t)$ macht in diesem Falle für jedes beliebige $k(s)$, das nicht auf $\psi_1(s)$ und $\psi_2(s)$ gleichzeitig orthogonal steht, den Ausdruck $L_2^{(2)}$ zu Null. Hierauf soll im nächsten Paragraphen näher eingegangen werden.

Auf die gleiche Weise wie oben läßt sich der Fall behandeln, daß in der Entwicklung (2) $a_\varkappa(t)$ der erste nicht identisch verschwindende Koeffizient ist. Ausschlaggebend ist zunächst die Form $\varkappa$-ter Ordnung in σ_{11} und σ_{12}

$$L_\varkappa^{(2)} = \varkappa_2(k, \psi_1) \int \varphi_2(t)\, a_\varkappa(t)\, \alpha_1^\varkappa(t)\, dt. \tag{43}$$

Ist diese Form positiv definit, was nur bei geradem $\varkappa$ möglich ist, so besitzt Gleichung (1) bei genügend kleinem μ beiderlei Vorzeichens keine reelle Lösung. Ist die Form indefinit, so hat man zunächst sämtliche — nur bis aufs Vorzeichen bestimmten — reellen normierten Eigenlösungen $\alpha_{11}, \alpha_{12}, \ldots, \alpha_{1k}$ $(k \leqq \varkappa)$ aufzusuchen, die $L_\varkappa^{(2)}$ zum Verschwinden bringen. Wir betrachten entsprechend dem Falle $n = 2$ hier nur diejenigen unter diesen $\alpha_{1\nu}$, die in σ_{11} einfache Lösungen der Gleichung $L_\varkappa^{(2)} = 0$ liefern [7]), so daß in der Nachbarschaft von diesen $\alpha_{1\nu}$ (also bei wenig variiertem σ_{11}) $L_\varkappa^{(2)}$ Werte beiderlei Vorzeichens annimmt [8]). Mit jedem dieser $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{1k}$ hat man die Ausdrücke $L_{\varkappa 1}^{(1)}, \ldots, L_{\varkappa k}^{(1)}$ zu bilden, die über die Lösungsanzahl wie früher entscheiden. Ist $\varkappa$ ungerade, so liefert jedes solche von Null verschiedene $L_{\varkappa\nu}^{(1)}$ für jedes kleine μ genau eine reelle Lösung von (1), die für verschwindendes μ gegen Const. $\alpha_{1\nu}(s)$ strebt; ist $\varkappa$ gerade, so liefert es zwei oder keine reelle solche Lösung, je nach dem Vorzeichen von μ.

Sollten die in diesem Paragraphen gemachten Voraussetzungen bei einem konkreten Problem nicht zutreffen, so kann man weiteren Untersuchungen nicht dadurch aus dem Wege gehen, daß man etwa die Rolle der beiden Verzweigungsgleichungen (39) vertauscht. Denn die Numerierung dieser Gleichungen war bei unseren Schlüssen eine willkürliche, zufällige, ihr Unterschied ist ein rein sachlicher: Wir haben den Index 1 eben derjenigen Kerntransformationsfunktion $p(s)$ erteilt, die wir gleich $k(s)$ gesetzt haben (vgl. (37)).

§ 4. Ein andersartiger Spezialfall bei $n = 2$.

Der Fall $n = 2$, $\Delta < 0$ ist im vorigen Paragraphen restlos erledigt worden. Die erste der Verzweigungsgleichungen (39) brauchte dabei garnicht betrachtet zu werden. Wir wollen uns in diesem Paragraphen mit dem Fall $\Delta > 0$ weiter beschäftigen und

---

[7]) Diese Ausdrucksweise ist gerechtfertigt; denn ist für ein $\alpha_{1\nu}$ σ_{11} bestimmt, so folgt, da $\alpha_{1\nu}$ und $\alpha_{2\nu}$ normiert und orthogonal sind, z. B.

$$\sigma_{12} = -\sigma_{21} = +\sqrt{1 - \sigma_{11}^2}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{11}.$$

Diese Formeln sollen auch späterhin benutzt werden. Die normierten orthogonalen Paare von Eigenfunktionen von (3) sind durch σ_{11} eindeutig charakterisiert.

[8]) Es genügt dazu übrigens, daß $\alpha_{1\nu}$ eine Wurzel ungerader Vielfachheit von $L_\varkappa^{(2)} = 0$ ist.

den noch ausstehenden Spezialfall in Angriff nehmen, daß für ein $\alpha_{1\nu}(t)$ $(\nu = 1, 2)$ $L_2^{(2)}$ und $L_2^{(1)}$ gleichzeitig verschwinden; wegen $\Delta > 0$ ist die Nullstelle von $L_2^{(2)}$ in σ_{11} einfach. Wir wissen schon, daß $\alpha_{1\nu}(t)$ für *alle* zulässigen $k(s)$ die Größen $L_2^{(2)}$ und $L_2^{(1)}$ gleichzeitig zum Verschwinden bringt.

Wir wollen darüber hinaus zunächst annehmen, daß die mit diesem $\alpha_{1\nu}(t)$ gebildeten Ausdrücke

$$(44)\quad \begin{cases} L_3^{(1)} = \dfrac{\varkappa_1}{(k, \psi_1)} \left[\int \varphi_1(t) a_3(t) \alpha_{1\nu}^3(t)\, dt + \int \varphi_1(t)\, a_2(t)\, \alpha_{1\nu}(t) \int K(t, r) a_2(r) \alpha_{1\nu}^2(r)\, dr\, dt\right] \\ L_3^{(2)} = \varkappa_2(k, \psi_1)\left[\int \varphi_2(t) a_3(t) \alpha_{1\nu}^3(t)\, dt + \int \varphi_2(t) a_2(t)\, \alpha_{1\nu}(t) \int K(t, r) a_2(r) \alpha_{1\nu}^2(r)\, dr\, dt\right] \end{cases}$$

beide von Null verschieden ausfallen. Zur Aufstellung von $K(t, r)$ benötigt man die Kerntransformationsfunktionen $q_1(t)$ und $q_2(t)$, die wie auf S. 157 durch $\alpha_{1\nu}(t)$ bestimmt sind. In diesem Falle genügt es, die Gleichungen (39) nur bis zu den Gliedern 3. Ordnung in $\lambda_1 + \mu$ zu betrachten. Aus der so verkürzten zweiten Gleichung (39) folgt dann

$$(45)\qquad \lambda_1 + \mu = -\frac{L_2^{(2)}}{L_3^{(2)}},$$

da $\lambda_1 + \mu = 0$ keine Lösung der ersten Gleichung (39) sein kann. Dies in die erste Gleichung (39) eingesetzt, liefert

$$(46)\qquad -\mu = \left(\frac{L_2^{(2)}}{L_3^{(2)}}\right)^2 \left[L_2^{(1)} - \frac{L_3^{(1)} L_2^{(2)}}{L_3^{(2)}}\right].$$

Gleichung (46) ist bei genügend kleinem μ sicher erfüllbar, wenn durch geringe Abänderung von $\alpha_{1\nu}$, d. h. von σ_{11}, die eckige Klammer beide Vorzeichen annehmen kann; das ist sicher erfüllt, wenn σ_{11} einfache Wurzel der Gleichung

$$(47)\qquad \begin{vmatrix} L_2^{(1)} & L_2^{(2)} \\ L_3^{(1)} & L_3^{(2)} \end{vmatrix} = 0$$

ist, d. h. wenn für unseren Ausgangswert σ_{11}

$$(48)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{dL_2^{(1)}}{d\sigma_{11}} & \dfrac{dL_2^{(2)}}{d\sigma_{11}} \\ L_3^{(1)} & L_3^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0$$

ausfällt.

Daß aus jeder Lösung $\lambda_1 + \mu$ (mit zugehörigem wohlbestimmten σ_{11}) der gekürzten Gleichungen (39) genau eine der ungekürzten folgt, sieht man leicht auf folgende Weise ein: Wegen $\Delta > 0$ und $L_3^{(2)} \neq 0$ ist jedenfalls nach (45) $\lambda_1 + \mu$ von der Größenordnung der Änderung von σ_{11}, d. h. von der Ordnung $\sigma = \sigma_{11} - \sigma_{11}^{(0)}$, wenn etwa $\sigma_{11}^{(0)}$ jetzt den zu $\alpha_{1\nu}(t)$ gehörenden Wert von σ_{11} bezeichnet. Statt der von Null verschiedenen Größen $L_3^{(1)}$ und $L_3^{(2)}$ stehen nun in (47) Größen, die sich von diesen höchstens um einen Summanden der Ordnung σ unterscheiden. Wegen (48) folgt nun aber sofort — etwa nach dem *Rouché*schen Satz —, daß die so erweiterte Gleichung (47) in der Umgebung von $\sigma = 0$ genau eine Lösung σ besitzt. Damit hat man dann eine Lösung von (1) bei genügend kleinem μ erhalten, die mit abnehmendem μ gegen Const. $\alpha_{1\nu}(s)$ geht. Wie früher schließt man leicht, daß dieses die einzige reelle Lösung dieser Art ist.

Verschwindet der Ausdruck (48), so hat man es mit einer mehrfachen Wurzel der Gleichung (47) zu tun, die in σ_{11} formal von fünftem Grade ist. Die Wurzel ist eine doppelte, wenn

$$(49) \qquad 2\begin{vmatrix} L_2^{(1)'} & L_2^{(2)'} \\ L_3^{(1)'} & L_3^{(2)'} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} L_2^{(1)''} & L_2^{(2)''} \\ L_3^{(1)} & L_3^{(2)} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ [9]}$$

ausfällt. Dabei hat man aber zu beachten, daß sich bei Änderung von σ_{11} nicht nur $\alpha_{1\nu}(t)$ ändert, sondern in $L_3^{(1)}$ und $L_3^{(2)}$ auch $K(s, t)$, da sich mit σ_{11} die Kerntransformationsfunktionen $q_1(t)$ und $q_2(t)$ ändern. In welcher Weise diese Änderung berechnet werden kann, soll erst im nächsten Paragraphen untersucht werden; wir nehmen hier also an, wir könnten $L_3^{(1)'}$ und $L_3^{(2)'}$ bestimmen.

Fällt der Ausdruck (49) von Null verschieden aus, so kann man etwa so überlegen: Nimmt man in der zweiten Gleichung (39) das Glied $L_4^{(2)}\,(\lambda_1 + \mu)^4$ hinzu, so hat man statt (45) in erster Näherung

$$(45') \qquad \lambda_1 + \mu = -\frac{L_2^{(2)}}{L_3^{(2)}}\left(1 + \frac{L_2^{(2)}\,L_4^{(2)}}{L_3^{(2)^2}}\right);$$

der Unterschied gegenüber (45) ist höchstens von der Größenordnung von $L_2^{(2)^2}$, d. h. von der Größenordnung σ^2. Unter Berücksichtigung des Gliedes vierter Ordnung in der ersten Gleichung (39) erhält man statt (46)

$$(46') \qquad -\mu = (\lambda_1 + \mu)^2\left[L_2^{(1)} - \frac{L_3^{(1)}\,L_2^{(2)}}{L_3^{(2)}}\left(1 + \frac{L_2^{(2)}\,L_4^{(2)}}{L_3^{(2)^2}}\right) + \frac{L_4^{(1)}\,L_2^{(2)^2}}{L_3^{(2)^3}}\right],$$

wenn Glieder, die in σ von höherer als zweiter Ordnung sind, in der eckigen Klammer unberücksichtigt bleiben. Wenn alle $L_3^{(\nu)}$ und $L_4^{(\nu)}$ $(\nu = 1, 2)$ von Null verschieden sind, ist die Klammer, da $L_2^{(1)} - \frac{L_3^{(1)}\,L_2^{(2)}}{L_3^{(2)}}$ wegen (49) von der Ordnung σ^2 ist, eine Summe von drei Gliedern der Größenordnung σ^2, und zwar sind jetzt alle Glieder dieser Größenordnung berücksichtigt. Ist nun diese Summe selbst von der Größenordnung σ^2, liegt sie also für genügend kleine σ zwischen $c\sigma^2$ und $C\sigma^2$, wo c und C das gleiche Vorzeichen Σ besitzen, so sieht man leicht, wenn man in (46′) noch den Ausdruck (45′) einführt: Im Falle $\Sigma = \operatorname{sign}\mu$ besitzt (1) für genügend kleine Werte μ keine reelle Lösung, die in erster Näherung von der Form Const. $\alpha_{1\nu}(t)$ ist, im Falle $\Sigma \neq \operatorname{sign}\mu$ genau zwei. Ist etwa $L_4^{(2)} = L_4^{(1)} = 0$, so ist Σ gleich dem Vorzeichen der eckigen Klammer von (46) bei kleinen σ-Werten. Man sieht hier schon, wie die Betrachtung in allgemeineren Fällen verläuft. Fast wörtlich überträgt sie sich auf den Fall, daß $a_\varkappa(t)$ der erste nicht identisch verschwindende Koeffizient der Entwicklung (2) ist, daß ferner $L_\varkappa^{(2)} = L_\varkappa^{(1)} = 0$ ist für eine Funktion $\alpha_{1\nu}(t)$ und daß schließlich die Nullstelle von $L_\varkappa^{(2)}$ in σ_{11} (dem Repräsentanten von $\alpha_{1\nu}(t)$) einfach ist. Auf den allgemeinen Fall kommen wir in § 6 zu sprechen.

§ 5. Die Berechnung der Ableitungen der L-Größen.

Zu den Ausführungen des vorigen Paragraphen wurden die Ableitungen der Größen $L_\varkappa^{(\nu)}$ nach dem $\alpha_1(t)$ (im vorigen Paragraphen $\alpha_{1\nu}(t)$ genannt) bestimmenden Parameter σ_{11} benutzt. Die Änderung einer solchen Größe $L_\varkappa^{(\nu)}$ ist auf zwei Grundänderungen zurückzuführen: 1. auf die Änderung von $\alpha_1(t)$ mit σ_{11}, 2. die Änderung der in (12) definierten Funktion $K(s, t)$. Daß die Änderung des zu $\alpha_1(t)$ zugehörigen $\alpha_2(t)$ nicht unmittelbar berücksichtigt zu werden braucht, liegt daran, daß wir uns von vornherein auf die beiden Gleichungen (39) der *einen* Unbekannten $\lambda_1 + \mu$ beschränkt, d. h. $\lambda_2 = 0$ gesetzt haben.

---

[9]) Die Ableitungen nach σ sind hier der Kürze halber durch Striche gekennzeichnet.

Da nach Anmerkung [7])

$$\alpha_1(t) = \sigma_{11}\,\varphi_1(t) + \sqrt{1-\sigma_{11}^2}\,\varphi_2(t)$$

ist, wird die Ableitung von $\alpha_1(t)$ nach σ_{11} gleich $\varphi_1(t) - \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{1-\sigma_{11}^2}}\,\varphi_2(t)$. Es bleibt daher nur noch die Aufgabe, die Änderung von $K(s,t)$ zu bestimmen. Dabei wissen wir schon, daß der in jeder L-Größe auftretende Bestandteil

$$\int q_\nu(s)\,K(s,t)\,ds \qquad (\nu = 1, 2)$$

von σ_{11} überhaupt unabhängig ist.

Um zunächst allgemeiner die Änderung von $K(s,t)$ mit $q_1(t)$ und $q_2(t)$ bei festem $p_1(s)$ und $p_2(s)$ zu studieren, gehen wir so vor (analog bei beliebigem n): Da in (29) durch Änderung von q_1, q_2 in Q_1, Q_2 bei festgehaltenem p_1, p_2 sich $N_1(t)$ und $N_2(t)$ nicht ändern, folgt sofort, daß $K(s,t)$ übergeht in eine Funktion $\overline{K}(s,t)$ der folgenden Form:

$$\overline{K}(s,t) = K(s,t) + \varphi_1(s)\,g_1(t) + \varphi_2(s)\,g_2(t). \tag{50}$$

Zur Bestimmung von $g_1(t)$ und $g_2(t)$ betrachten wir die lösenden Kerne $\mathsf{E}(s,t)$ und $\overline{\mathsf{E}}(s,t)$, in den E bei Änderung von q_1, q_2 in Q_1, Q_2 übergeht. Bekanntlich ist

$$\mathsf{E}(s,t) + \int E(s,r)\,\mathsf{E}(r,t)\,dr = -\,E(s,t).$$

Daraus folgt wegen (5)

$$\mathsf{E}(s,t) + \frac{1}{2\pi}\int G(s,r)\,a_1(r)\,\mathsf{E}(r,t)\,dr = -\,\frac{1}{2\pi}\,a_1(t)\,G(s,t) \tag{51}$$
$$-\,p_1(s)\,[q_1(t) + \int q_1(r)\,\mathsf{E}(r,t)\,dr] - p_2(s)\,[q_2(t) + \int q_2(r)\,\mathsf{E}(r,t)\,dr].$$

Wir setzen jetzt

$$q_\nu(t) + \int q_\nu(r)\,\mathsf{E}(r,t)\,dr = z_\nu(t) \quad (\nu = 1, 2) \tag{52}$$

übereinstimmend mit (22). Dann gilt analog (23)

$$z_\nu(t) + \frac{1}{2\pi}\int G(r,t)\,a_1(t)\,z_\nu(r)\,dr = q_\nu(t) - (p_1, z_\nu)\,q_1(t) - (p_2, z_\nu)\,q_2(t). \tag{53}$$

Hieraus folgt wie früher (24)

$$\begin{aligned}(p_1, z_1) &= 1, \quad (p_1, z_2) = 0,\\ (p_2, z_1) &= 0, \quad (p_2, z_2) = 1,\end{aligned} \tag{54}$$

daher wegen (53)

$$\begin{aligned}z_1(t) &= \tau_{11}\,\psi_1(t) + \tau_{12}\,\psi_2(t),\\ z_2(t) &= \tau_{21}\,\psi_1(t) + \tau_{22}\,\psi_2(t),\end{aligned} \tag{55}$$

wo sich die $\tau_{\nu\mu}$ durch Einsetzen in (54) bestimmen. Die Funktionen $z_\nu(t)$ sind von der Wahl von q_1 und q_2 unabhängig. Stellt man daher die zu (51) analoge Gleichung für Q_1 und Q_2 statt q_1 und q_2 auf und subtrahiert, so folgt:

$$\overline{\mathsf{E}}(s,t) = \mathsf{E}(s,t) + \varphi_1(s)\,h_1(t) + \varphi_2(s)\,h_2(t). \tag{56}$$

Aus (52) ergibt sich daher

$$\begin{aligned}Q_\nu(t) - q_\nu(t) + \int \mathsf{E}(r,t)(Q_\nu(r) - q_\nu(r))\,dr&\\ = -\,(\varphi_1, Q_\nu)\,h_1(t) - (\varphi_2, Q_\nu)h_2(t). \qquad (\nu = 1, 2).&\end{aligned} \tag{57}$$

In diesen beiden Gleichungen sind die linken Seiten bekannte Größen, man kann sie daher benutzen, um $h_1(t)$ und $h_2(t)$ eindeutig auszurechnen, wodurch nach (56) $\overline{\mathsf{E}}(s,t)$ bekannt ist. Dieses Ergebnis lehrt: *Hat man einen lösenden Kern $\mathsf{E}(s,t)$ aufgestellt, so ergibt sich jeder zu anderen Transformationsfunktionen $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ gehörende lösende Kern durch Auflösung eines linearen Gleichungssystems.*

Man kann aber diesen Zusammenhang noch anders darstellen. Ich berechne dazu die Funktion

$$k_\nu(t) = Q_\nu(t) + \int \mathsf{E}(r, t)\, Q_\nu(r)\, dr, \tag{58}$$

wo also $\mathsf{E}(r, t)$ der zu q_1, q_2 gehörende lösende Kern ist. Es ist, wie schon so oft geschlossen wurde,

$$k_\nu(t) + \frac{1}{2\pi}\int G(s, t)\, a_1(t)\, k_\nu(s)\, ds = Q_\nu(t) - (p_1, k_\nu)\, q_1(t) - (p_2, k_\nu)\, q_2(t). \tag{59}$$

Das gibt für (p_1, k_ν) und (p_2, k_ν) die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} (q_1, \varphi_1)(p_1, k_\nu) + (q_2, \varphi_1)(p_2, k_\nu) &= (Q_\nu, \varphi_1) \\ (q_1, \varphi_2)(p_1, k_\nu) + (q_2, \varphi_2)(p_2, k_\nu) &= (Q_\nu, \varphi_2). \end{aligned} \tag{60}$$

$k_\nu(t)$ ist mithin Lösung von (59) mit der jetzt bekannten rechten Seite, und zwar ist $k_\nu(t)$ durch die aus (60) errechneten Werte (p_1, k_ν) und (p_2, k_ν) eindeutig bestimmt. — Aus (57) wird jetzt

$$k_\nu(t) - z_\nu(t) = - (\varphi_1, Q_\nu)\, h_1(t) - (\varphi_2, Q_\nu)\, h_2(t). \tag{61}$$

Aus (12) und (56) ergibt sich nun Formel (50) mit

$$g_\varrho(t) = - \frac{1}{2\pi}\int G(s, t)\, h_\varrho(s)\, ds. \tag{62}$$

Da diese allgemeinen Formeln in den $Q_\nu(t)$ und den davon abhängenden Größen linear sind, können wir in unserem vorliegenden Problem zur Berechnung der Ableitung $K'(s, t) \equiv \dfrac{d}{d\sigma_{11}} K(s, t)$ einfach $Q_\nu(t)$ ersetzen durch $\alpha'_\nu(t) \equiv \dfrac{d}{d\sigma_{11}} \alpha_\nu(t)$. Auf S. 162 hatten wir schon berechnet

$$\alpha'_1(t) = \varphi_1(t) - \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{1 - \sigma_{11}^2}}\, \varphi_2(t); \tag{63}$$

analog folgt nach Fußnote [7]) auf S. 159

$$\alpha'_2(t) = \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{1 - \sigma_{11}^2}}\, \varphi_1(t) + \varphi_2(t). \tag{64}$$

Aus (60) folgt somit unter Beachtung von (19) und der Fußnote [7])

$$(p_1, k'_1) = (p_2, k'_2) = 0, \qquad (p_2, k'_1) = - (p_1, k'_2) = - \frac{1}{\sqrt{1 - \sigma_{11}^2}}. \tag{65}$$

Da auf der rechten Seite von (59) ein Ausdruck der Form $c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t)$ steht und diese Funktion sowohl zu $\varphi_1(t)$ als auch zu $\varphi_2(t)$ orthogonal sein soll, muß sie identisch verschwinden. Daher sind $k'_1(t)$ und $k'_2(t)$ Eigenfunktionen von (4), und zwar sind sie durch (65) eindeutig bestimmt; man erhält unter Berücksichtigung von (36) und (37)

$$k'_1(t) = - \frac{(k, \psi_1)}{\sqrt{1 - \sigma_{11}^2}}\, \psi_2(t), \qquad k'_2(t) = \frac{1}{(k, \psi_1)\sqrt{1 - \sigma_{11}^2}}\, \psi_1(t). \tag{66}$$

Aus (61) folgt nun

$$k'_\nu(t) = - (\varphi_1, \alpha_\nu)\, h'_1(t) - (\varphi_2, \alpha_\nu)\, h'_2(t)$$

und daraus

$$\begin{aligned} h'_1(t) &= \frac{1}{(k, \psi_1)}\, \psi_1(t) + \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{1 - \sigma_{11}^2}}\, (k, \psi_1)\psi_2(t), \\ h'_2(t) &= - \frac{\sigma_{11}}{(k, \psi_1)\sqrt{1 - \sigma_{11}^2}}\, \psi_1(t) + (k, \psi_1)\, \psi_2(t); \end{aligned} \tag{67}$$

schließlich wird

$$\mathsf{E}'(s,t) = \varphi_1(s)\,h_1'(t) + \varphi_2(s)\,h_2'(t) \tag{68}$$

und nach (50) und (62) unter Beachtung von (31)

$$K'(s,t) = \varphi_1(s)\,g_1'(t) + \varphi_2(s)\,g_2'(t) \tag{69}$$

mit

$$\begin{aligned} g_1'(t) &= \frac{\varkappa_1}{(k,\psi_1)}\,\varphi_1(t) + \frac{\varkappa_2\sigma_{11}}{\sqrt{1-\sigma_{11}^2}}\,(k,\psi_1)\varphi_2(t), \\ g_2'(t) &= -\frac{\varkappa_1\sigma_{11}}{(k,\psi_1)\sqrt{1-\sigma_{11}^2}}\,\varphi_1(t) + \varkappa_2(k,\psi_1)\varphi_2(t), \end{aligned} \tag{70}$$

worin $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ die Werte (32) besitzen.

Dieses Resultat zeigt, daß sich $K'(s,t)$ und $\mathsf{E}'(s,t)$ ohne Kenntnis von $K(s,t)$ bzw. $\mathsf{E}(s,t)$ auf einfachste Weise berechnen lassen. Damit ist im Prinzip die Differentiation der L-Größen nach dem Parameter σ_{11} durchgeführt. Die allgemeinen Formeln dieses Paragraphen lehren auch, daß man bei festem $p_1(s)$ und $p_2(s)$ das $K(s,t)$ nur für irgend zwei Funktionen $q_1(t)$ und $q_2(t)$ zu bestimmen braucht und daraus den Wert von $K(s,t)$ in relativ einfacher Weise für jedes beliebige andere Paar von Kerntransformationsfunktionen $Q_1(t)$ und $Q_2(t)$ ermitteln kann. Allerdings dürfte im allgemeinen die Aufstellung überhaupt irgendeines $K(s,t)$ einigermaßen schwierig sein.

Noch eine andere Frage soll hier ganz kurz angeschnitten werden. Die Betrachtungen des § 4 fordern eine Berechnung der höheren L-Größen auch für verschiedene Kerntransformationsfunktionen $p_1(s)$ und $p_2(s)$, wenn man mehr als eine Funktion $k(s)$ auf der rechten Seite von (35) zu betrachten wünscht; denn es war ja der wesentlichste Teil der Methode, daß wir in (37) $p_1(s)$ mit $k(s)$ identifizierten. Man muß also noch die Änderung von $K(s,t)$ bei Änderung von $p_1(s)$ und $p_2(s)$ in $P_1(s)$ und $P_2(s)$ untersuchen. Wir wollen hier die Untersuchung nur kurz skizzieren und nicht das gesamte Formelsystem aufstellen. Die bei festgehaltenem $q_1(s)$ und $q_2(s)$ zu den Transformationsfunktionen $P_1(s)$ und $P_2(s)$ gehörenden Größen sollen durch einen angehängten Stern kenntlich gemacht werden.

Nach (54) und (55) sind $z_1(t)$ und $z_2(t)$ ebenso wie $z_1^*(t)$ und $z_2^*(t)$ durch $p_1(s)$, $p_2(s)$, $P_1(s)$, $P_2(s)$ eindeutig als Eigenfunktionen von (4) bestimmt. Schreibt man die Gleichung (51) für $\mathsf{E}(s,t)$ und $\mathsf{E}^*(s,t)$ an, so sind daher ihre rechten Seiten bekannte Funktionen, deren Differenz von der Form $r_1(s)\,\psi_1(t) + r_2(s)\,\psi_2(t)$ ist mit $(r_\nu, \psi_\mu) = 0$ für $\mu, \nu = 1, 2$. Die Funktionen $r_\nu(s)$ sind unmittelbar aus den gegebenen $p_1(s)$, $p_2(s)$, $P_1(s)$ und $P_2(s)$ berechenbar. Bezeichnet man mit $\pi_\nu(s)$ eine Lösung von

$$\pi_\nu(s) + \frac{1}{2\pi}\int G(s,t)\,a_1(t)\,\pi_\nu(t)\,dt = r_\nu(s), \tag{71}$$

so erhält man demnach

$$\mathsf{E}^*(s,t) - \mathsf{E}(s,t) = \pi_1(s)\,\psi_1(t) + \pi_2(s)\,\psi_2(t) + \varphi_1(s)\,v_1(t) + \varphi_2(s)\,v_2(t), \tag{72}$$

wo $v_1(t)$ und $v_2(t)$ zunächst noch unbekannt sind. Es ist jedoch nach (52)

$$\int q_\nu(r)\,[\mathsf{E}^*(r,t) - \mathsf{E}(r,t)]\,dr = z_\nu^*(t) - z_\nu(t) \qquad (\nu = 1, 2).$$

Setzt man hier den Wert (72) ein, so erhält man zwei lineare Gleichungen für $v_1(t)$ und $v_2(t)$, die sicher lösbar sind, da ihre Determinante einfach D_2 ist. Überdies folgt wegen (72), daß die $v_\nu(t)$ wieder Eigenfunktionen von (4) sind, mithin von der Form

$$v_\nu(t) = \chi_{\nu 1}\,\psi_1(t) + \chi_{\nu 2}\,\psi_2(t). \tag{73}$$

Man sieht, daß in diesem Falle die Berechnung der Änderungen von $\mathsf{E}(s,t)$ sehr viel schwieriger ist, da man gemäß (71) die zwei Funktionen $\pi_1(s)$ und $\pi_2(s)$ zu berechnen hat. Der Übergang von $\mathsf{E}^*(s,t) - \mathsf{E}(s,t)$ zu $K^*(s,t) - K(s,t)$ nach (12) läßt gerade diese zwei Funktionen ungeändert; er transformiert nur die Funktionen von t, die in (72) Eigenfunktionen von (4) sind, in gewisse Eigenfunktionen von (3). Im Prinzip ist durch die Untersuchungen dieses Paragraphen die Aufstellung von $\mathsf{E}^*(s,t)$ und $K^*(s,t)$ für beliebige Kerntransformationsfunktionen $P_1(s)$, $P_2(s)$, $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ auf die Berechnung von $\mathsf{E}(s,t)$ bzw. $K(s,t)$ für vier beliebige Transformationsfunktionen $p_1(s)$, $p_2(s)$, $q_1(t)$, $q_2(t)$ zurückgeführt.

§ 6. Der Fall $n = 2$, $a_2(t) \not\equiv 0$, $\Delta = 0$. Bemerkungen zum allgemeinen Fall bei $n = 2$.

Wir knüpfen jetzt wieder an die Untersuchungen des § 3 an. Dort hatten wir bisher den Fall ausgeschlossen, daß die Determinante Δ in (42) verschwindet. In diesem Falle gibt es — wieder abgesehen vom Vorzeichen — nur eine Funktion $\alpha_1(t)$, die $L_2^{(2)}$ zum Verschwinden bringt, und in der Nachbarschaft dieses $\alpha_1(t)$, d. h. für wenig abgeänderte σ_{11}, nimmt $L_2^{(2)}$ nur Werte desselben Vorzeichens an. Dieses $\alpha_1(t)$ setze man nun in gleicher Weise in die erste Gleichung (39) ein wie früher $\alpha_{11}(t)$. Wir nehmen wieder an, daß die mit $\alpha_1(t)$ gebildete Größe $L_2^{(1)}$ ungleich Null ausfällt. Für $\operatorname{sign}\mu = \operatorname{sign} L_2^{(1)}$ gibt es dann wie früher keine reelle Lösung. Im Falle $\operatorname{sign}\mu = -\operatorname{sign} L_2^{(1)}$ errechnen sich aus der ersten Gleichung (39) zwei reelle Wurzeln $\lambda_1 + \mu$ mit verschiedenem Vorzeichen Σ und $-\Sigma$. Man hat jetzt in der zweiten Verzweigungsgleichung (39) das nächsthöhere Glied zu berücksichtigen. Ist z. B. $L_3^{(2)} \neq 0$ — diese Größe ist berechenbar, da mit $\alpha_1(t)$ auch $q_1(t)$ und $q_2(t)$ bekannt sind — so stimmt das Vorzeichen des quadratischen Gliedes der zweiten Gleichung (39) mit dem des kubischen für einen Wert von Σ überein, für $-\Sigma$ dagegen nicht. Es gibt also keine Wurzel $\lambda_1 + \mu$ der beiden Gleichungen (39) mit dem Vorzeichen Σ; dagegen gibt es genau zwei normierte Eigenfunktionen $\alpha_{11}(t)$ und $\alpha_{12}(t)$ von (3), zu denen je eine Wurzel $\lambda_{11} + \mu$ bzw. $\lambda_{12} + \mu$ mit dem Vorzeichen $-\Sigma$ gehört, so daß beide Gleichungen (39) erfüllt sind. Das sieht man am einfachsten ein, indem man aus der zweiten Gleichung (39) angenähert $\lambda_1 + \mu = -\dfrac{L_2^{(2)}}{L_3^{(2)}}$ ausrechnet und in die erste Gleichung (39) einsetzt:

$$-\mu = L_2^{(1)}\left(\frac{L_2^{(2)}}{L_3^{(2)}}\right)^2.$$

Ist μ genügend klein, so gibt es genau zwei Werte σ_{11}, die diese Gleichung befriedigen. Auf gleiche Weise wie früher bestätigt man den Satz: *Im Falle des Verschwindens von Δ gibt es bei $L_3^{(2)} \neq 0$ genau zwei reelle Lösungen bei genügend kleinem μ, falls* $\operatorname{sign}\mu = -\operatorname{sign} L_2^{(1)}$ *ist, im Falle* $\operatorname{sign}\mu = \operatorname{sign} L_2^{(1)}$ *gibt es keine reelle Lösung.* Für $\mu \to 0$ sind die beiden evtl. vorhandenen Lösungen in erster Näherung wieder von der Form Const. $\alpha_1(t)$. Daß es etwa im Falle $\operatorname{sign}\mu = -\operatorname{sign} L_2^{(1)}$ nicht mehr als zwei Lösungen geben kann, schließt man z. B. so: Eine evtl. noch vorhandene dritte Lösung müßte bei kleinem μ auch näherungsweise von der Form Const. $\alpha_1(t)$ sein. Zu ihr würde eine wohlbestimmte normierte Eigenfunktion $\alpha_{13}(t)$ von (3) gehören und nach der Form der Verzweigungsgleichungen (39), die man durch entsprechende Wahl von $q_1(t)$ und $q_2(t)$ wieder erhalten kann, genau eine Wurzel $\lambda_1 + \mu$ der ersten Gleichung (39), und zwar vom Vorzeichen $-\Sigma$. Zu jeder solchen Wurzel $\lambda_1 + \mu$, von denen es genau zwei gibt, gibt es aber,

sofern sie genügend klein ist, genau eine zugehörige Funktion $\alpha_1(t)$, so daß notwendig $\alpha_{13}(t)$ mit einer von den beiden schon bekannten Funktionen $\alpha_{11}(t)$ und $\alpha_{12}(t)$ übereinstimmen muß; daraus folgt aber, daß die angenommene dritte Lösung von (1) einer der beiden anderen gleich sein muß.

Wir betrachten noch kurz den allgemeinsten bei $n = 2$ möglichen Fall. Sei jetzt für unseren Ausgangswert $\sigma_{11}^{(0)}$ $L_\vartheta^{(2)}$ die erste von Null verschiedene Zahl der $L_\nu^{(2)}$. Die etwa in σ_{11} identisch verschwindenden $L_\nu^{(2)}$ können wir mit anschreiben. Dann besitzt die zweite der Gleichungen (39) genau ϑ Wurzeln $\lambda_1 + \mu$, deren Absolutbetrag kleiner ist als eine gewisse Zahl ε, wenn für $\sigma = \sigma_{11} - \sigma_{11}^{(0)}$ $|\sigma| < \delta$ gilt mit einer geeigneten Zahl δ. Läßt man noch die (mindestens 2) Lösungen fort, die für alle σ verschwinden, so hat man eine gewisse Anzahl $\omega \leqq \vartheta - 2$ von Wurzeln $\lambda_1 + \mu$, die für kleine σ analytische Funktionen von σ sind und für $\sigma = 0$ einen ω-fachen Verzweigungspunkt besitzen. Sie genügen übrigens einer Gleichung ω-ten Grades mit in σ analytischen Koeffizienten

$$(74) \qquad (\lambda_1 + \mu)^\omega + A_1(\sigma)\,(\lambda_1 + \mu)^{\omega-1} + \cdots + A_\omega(\sigma) = 0,$$

die natürlich in rohester Näherung mit der durch $(\lambda_1 + \mu)^{\vartheta-\omega}$ dividierten zweiten Gleichung (39) übereinstimmt. Die reellen unter diesen Wurzeln $\lambda_1 + \mu$ hat man nun in die erste Verzweigungsgleichung (39) einzutragen, die dadurch eine Gleichung für σ allein wird. Die Anzahl der bei fest gegebenem genügend kleinen μ im ganzen auftretenden genügend kleinen reellen Wurzeln σ ist gleich der Anzahl der reellen Lösungen von (1), die nach dem Ausgangswert $\sigma_{11}^{(0)}$ orientiert sind; zu jedem solchen σ rechnet sich eine Lösung $w(s)$ von (1) in gleicher Weise wie früher. Alle diese $w(s)$ haben in erster Näherung die Form Const. $\alpha_1(s)$, wo $\alpha_1(s)$ durch $\sigma_{11}^{(0)}$ bestimmt ist. Will man nur die Lösungsanzahl feststellen, so braucht man natürlich die genauen Koeffizienten $A_\nu(\sigma)$ ($\nu = 1, 2, \ldots, \omega$) in (74) nicht zu kennen; man wird, wie dies auch in § 4 geschehen ist, in den beiden Gleichungen (39) alle diejenigen Glieder streichen, die infolge ihrer kleinen Größenordnung das Resultat nicht mehr beeinflussen. Die in den früheren Paragraphen behandelten Spezialfälle zeigen entweder, wie man die hier geschilderte allgemeine Methode anzuwenden hat, oder, wie man durch geeignete Abänderung derselben in gewissen Fällen rascher zum Ziel gelangen kann. Es hat natürlich im Rahmen dieser Arbeit keinen Sinn, noch weitere Beispiele relativ einfach durchzurechnender Spezialfälle aufzuführen. — Wie man die Ausgangswerte $\sigma_{11}^{(0)}$ erhält, ist schon in § 3 auseinandergesetzt worden. Es sind dies die reellen Nullstellen in σ_{11} der Form (43), wo $L_\varkappa^{(2)}$ der erste nicht identisch verschwindende L-Koeffizient der zweiten Verzweigungsgleichung (39) ist.

§ 7. Erweiterung der Untersuchungen auf beliebiges n.

Hat die homogene lineare Integralgleichung (3) n unabhängige Eigenlösungen, so bilden die Verzweigungsgleichungen (18) ein System von n Gleichungen für die n Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, das überdies den Parameter μ enthält. Wir betrachten wieder nur rechte Seiten $h(s) = \mu \cdot k(s)$, für die $k(s)$ nicht zu allen Eigenfunktionen $\varphi_\nu(s)$ von (3) orthogonal ist, und bestimmen zunächst in Analogie zu den Betrachtungen des § 3 die Funktionen $\psi_1(s), \ldots, \psi_n(s)$ in folgender Weise: Es gibt genau eine $(n-1)$-parametrige Schar von Eigenfunktionen von (4), die zu dem gegebenen $k(s)$ orthogonal sind, zu dieser ist vermöge (31) eine $(n-1)$-parametrige Schar von Eigenfunktionen $\varphi_\nu(s)$ von (3) zugeordnet, die wir durch $n-1$ zueinander orthogonale normierte Eigenfunktionen

$\varphi_2(s), \varphi_3(s), \ldots, \varphi_n(s)$ erzeugen können. $\varphi_1(s)$ sei dann eine der beiden zu $\varphi_2(s), \ldots, \varphi_n(s)$ orthogonalen normierten Eigenfunktionen von (3). Durch (31) sind dann auch die $\psi_1(s), \psi_2(s), \ldots, \psi_n(s)$ bestimmt.

Nachdem so die $\varphi_\nu(s)$ und $\psi_\nu(s)$ festgelegt sind, setzen wir analog (37)

$$p_1(s) = k(s), \; p_\nu(s) = \psi_\nu^*(s) \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n), \tag{75}$$

wo die $\psi_\nu^*(s)$ gemäß

$$(\psi_\nu^*, \psi_\nu) = 1, \; (\psi_\nu^*, \psi_\mu) = 0 \qquad (\mu \neq \nu)$$

zu bestimmen sind; $k(s)$ kann so angenommen werden, daß $(k, \psi_1) = 1$ ausfällt. Bei dieser Wahl der $p_\nu(s)$ ist $D_1 = 1$. Dann ist wegen (21) und (24)

$$(q_1, \beta) = \mu(k, z_1) = \mu, \qquad (q_\nu, \beta) = \mu(k, z_\nu) = 0 \text{ für } \nu \geqq 2, \tag{76}$$

und zwar abhängig von der Wahl der $q_1, q_2, \ldots, q_n$, die wir wie früher durch folgende Überlegung bestimmen:

Angenommen, die Gleichung (1) habe zu der festen rechten Seite (35) eine reelle Lösung $w(s)$. Dann kann man $q_2(s), q_3(s), \ldots, q_n(s)$ gleich $n - 1$ zueinander orthogonalen normierten Eigenfunktionen von (3) setzen, die überdies alle zu $w(s)$ orthogonal sind. $q_1(s)$ sei dann gleichfalls normierte Eigenfunktion von (3), und zwar zu $q_2(s), \ldots, q_n(s)$ orthogonal. Diese Wahl der $q_\nu(s)$ ist sicher zulässig. Durch diese Festsetzungen ist wegen (9)

$$\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$$

bewirkt worden, so daß die n Verzweigungsgleichungen (18) n Gleichungen mit einer einzigen Variablen $\lambda_1 + \mu$ werden. Sie können wegen (76) in folgender Form angeschrieben werden:

$$\begin{aligned} 0 &= \mu + \sum_{\nu=2}^{\infty} L_\nu^{(1)} (\lambda_1 + \mu)^\nu, \\ 0 &= 0 + \sum_{\nu=2}^{\infty} L_\nu^{(2)} (\lambda_1 + \mu)^\nu, \\ &\vdots \\ 0 &= 0 + \sum_{\nu=2}^{\infty} L_\nu^{(n)} (\lambda_1 + \mu)^\nu. \end{aligned} \tag{77}$$

Dabei ist z. B.

$$\begin{aligned} L_2^{(1)} &= \int N_1(t)\, a_2(t)\, \alpha_1^2(t)\, dt = \varkappa_1 \int \varphi_1(t)\, a_2(t)\, \alpha_1^2(t)\, dt, \\ L_2^{(2)} &= \qquad\qquad\qquad = \varkappa_2 \int \varphi_2(t)\, a_2(t)\, \alpha_1^2(t)\, dt, \\ &\vdots \\ L_2^{(n)} &= \qquad\qquad\qquad = \varkappa_n \int \varphi_n(t)\, a_2(t)\, \alpha_1^2(t)\, dt, \end{aligned} \tag{78}$$

wo die $\varkappa_\varrho$ durch (32) gegeben sind.

Umgekehrt entsteht, wenn $w(s)$ und damit die $q_\nu(t)$ noch nicht bekannt sind, die Aufgabe, die $q_\nu(t)$ so zu wählen, daß die n Gleichungen (77), bei denen wie früher die q_ν in den L-Größen stecken, erfüllt sind, wodurch dann $\lambda_2 = \lambda_3 = \cdots = \lambda_n = 0$ von selbst erreicht ist.

Bei vorgelegtem $k(s)$ sind die $p_\nu(s)$ wie früher fest gewählt. Verschwindet $a_2(t)$ nicht identisch, so sind analog wie früher die $L_2^{(\nu)}$ formal Formen zweiter Ordnung in $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{1n}$. *Ist nun irgendein* $L_2^{(\nu)}$ *mit* $\nu = 2, 3, \ldots, n$ *eine definite Form in den* $\sigma_{1\varrho}$, die also nur für $\sigma_{11} = \sigma_{12} = \cdots = \sigma_{1n} = 0$ verschwindet, *so besitzt Gleichung* (1) *bei genügend kleinem* μ *beiderlei Vorzeichens keine reelle Lösung*; denn die ν-te Gleichung (77) ist dann

durch kein reelles $\lambda_1 + \mu$ zu befriedigen. Noch mehr: Einzig und allein dann ist eine Lösung von (1) zu erwarten, wenn es Wertsysteme $\sigma_{11}^{(\iota)}, \sigma_{12}^{(\iota)}, \ldots, \sigma_{1n}^{(\iota)}$ gibt, die $L_2^{(2)}, L_2^{(3)}, \ldots, L_2^{(n)}$ gleichzeitig zum Verschwinden bringen. Dazu ist jedenfalls notwendig, daß jede lineare Kombination der $n-1$ letzten rechten Seiten von (78) zu Null gemacht werden kann. Die $n-1$ Gleichungen $L_2^{(2)} = \cdots = L_2^{(n)} = 0$ werden, wenn die $L_2^{(\nu)}$ nicht identisch verschwinden, „im allgemeinen" etwa l reelle Lösungen $\sigma_{11}^{(\iota)}, \ldots, \sigma_{1n}^{(\iota)}$ $(\iota = 1, 2, \ldots, l)$ besitzen, derart, daß die zu diesen $\sigma_{11}^{(\iota)}, \ldots, \sigma_{1n}^{(\iota)}$ gehörenden Eigenfunktionen $\alpha_{1\iota}$ von (3) normiert sind [10]). In der zu einem solchen $\alpha_{1\iota}$ orthogonalen $(n-1)$-parametrigen Schar von Eigenfunktionen von (3) wähle man nun $\alpha_{2\iota}, \alpha_{3\iota}, \ldots, \alpha_{n\iota}$ normiert und zueinander orthogonal irgendwie aus; dadurch sind die Kerntransformationsfunktionen $q_\nu(t)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ gleich den $\alpha_{\nu\iota}(t)$ bestimmt, und man kann sämtliche in den Verzweigungsgleichungen (77) auftretenden L-Größen berechnen. Jetzt hat man wie im Falle $n = 2$ $\alpha_{1\iota}$ ein wenig zu variieren und zuzusehen, ob auf diese Weise die n Gleichungen (77) eine Lösung besitzen, die also dann für $\mu \to 0$ in erster Näherung von der Form Const. $\alpha_{1\iota}(s)$ ist. Man hat dabei zu beachten, daß die zu dem abgeänderten $\alpha_{1\iota}$ gehörenden abgeänderten $\alpha_{\nu\iota}$ $(\nu = 2, 3, \ldots, n)$ nicht eindeutig bestimmt sind; dies schadet aber nichts, da es bei unserer Betrachtung offenbar nur auf den zu $\alpha_{1\iota}$ orthogonalen $(n-1)$-parametrigen Unterraum der Eigenfunktionen von (3) ankommt; denn wenn (1) überhaupt eine Lösung besitzt, ist sie ja stets zu einer $(n-1)$-parametrigen Schar von Eigenlösungen von (3) orthogonal.

Aus diesen kurzen Bemerkungen ersieht man schon, daß im Falle $n > 2$ die Betrachtung wesentlich komplizierter verläuft. Erstens hat man ja ein Gleichungssystem aufzulösen, das aus $n-1$ homogenen quadratischen Formen mit n Unbekannten besteht, nämlich das System $L_2^{(2)} = L_2^{(3)} = \cdots = L_2^{(n)} = 0$. Dies ist schon eine schwierige Aufgabe, die in völliger Allgemeinheit bisher wohl noch nicht behandelt werden kann. Wenn die $L_2^{(\nu)}$ identisch verschwinden, so tritt an die Stelle dieses Systems sogar ein System von Formen höherer Ordnung, was noch unangenehmer ist. Hat man eine normierte Eigenfunktion $\alpha_{1\iota}(t)$ von (3) gefunden, die die in Rede stehenden $n-1$ Gleichungen erfüllt, so hat man allerdings die etwas einfachere zweite Aufgabe, zu untersuchen, ob bei genügend kleinem μ die n Gleichungen (77) durch einen Wert $\lambda_1 + \mu$ befriedigt werden können, wenn man dabei noch das eben gefundene $\alpha_{1\iota}(t)$ als normierte Eigenfunktion von (3) ein wenig variiert. Diese Untersuchung ist im allgemeinen Falle ähnlich auszuführen wie die auf S. 166 geschilderte allgemeine Auflösungsmethode im Falle $n = 2$; nur verläuft sie hier natürlich in $n-1$ Dimensionen. Die Festlegung der dabei benötigten in weitem Maße willkürlichen Funktionen $\alpha_{2\iota}(t), \ldots, \alpha_{n\iota}(t)$ wird man natürlich auf irgendeinem wohldefinierten mathematischen Wege vornehmen, etwa im Falle $\sigma_{1\mu} \neq 0$ für $\mu = 1, 2, \ldots, n$, indem man

---

[10]) Es ist natürlich durchaus möglich, daß es Scharen von reellen Lösungen der $n-1$ Gleichungen $L_2^{(\varrho)} = 0$ $(\varrho = 2, 3, \ldots, n-1)$ gibt, die von gewissen Parametern abhängen. Man braucht ja etwa nur im Falle $n = 3$, nachdem man die nur von $k(t)$ abhängenden Funktionen $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ und $\varphi_3(t)$ fest gewählt hat, $a_2(t)$ den Bedingungen

$$\int \varphi_3(t)\, \varphi_\nu(t)\, a_2(t)\, \varphi_\mu(t)\, dt = 0$$

zu unterwerfen, wo ν und μ unabhängig voneinander die Zahlen von 1 bis 3 durchlaufen sollen. Dann sagt die Gleichung $L_2^{(3)} = 0$ nichts aus, da ihre sämtlichen Koeffizienten verschwinden, und man kann bei der einzig übrigbleibenden Gleichung $L_2^{(2)} = 0$ σ_{13} als Parameter auffassen. Auf solche Fälle näher einzugehen, lohnt an dieser Stelle nicht, da schon der „allgemeine" Fall genügend Schwierigkeiten in sich schließt.

$$\begin{aligned}
\alpha_{2\iota} &= \sigma_{21}\varphi_1 + \sigma_{22}\varphi_2, \\
\alpha_{3\iota} &= \sigma_{31}\varphi_1 + \sigma_{32}\varphi_2 + \sigma_{33}\varphi_3, \\
&\vdots \\
\alpha_{n\iota} &= \sigma_{n1}\varphi_1 + \sigma_{n2}\varphi_2 + \cdots + \sigma_{nn}\varphi_n
\end{aligned}$$

setzt, wobei die hier auftretenden $\sigma_{\nu\mu}$ durch die Orthogonalitäts- und Normierungsbedingungen eindeutig festgelegt sind. Falls mehrere der $\sigma_{1\mu}$ verschwinden, wird man natürlich die ersten $\alpha_{2\iota}$, $\alpha_{3\iota}$ ... gleich den dazugehörigen φ_μ setzen.

Ein konkret vorliegendes Einzelproblem wird man wohl nach diesen kurzen Bemerkungen trotz des Fehlens allgemeiner Untersuchungen in jedem Falle durchrechnen können. Jedenfalls ist durch die voranstehenden Ausführungen die Untersuchung der Anzahl der reellen Lösungen von (1) zu einer von uns betrachteten rechten Seite (35) bei genügend kleinem μ auch im unangenehmsten Falle wesentlich erleichtert worden. Im nächsten Paragraphen soll an einem einfachen Beispiel die Brauchbarkeit der Methode dargetan werden.

§ 8. Die erste Randwertaufgabe von $\Delta u + \mathfrak{Sin}\, u = 0$.

Wir behandeln in diesem Paragraphen die erste Randwertaufgabe der elliptischen Differentialgleichung

$$\Delta u + \mathfrak{Sin}\, u = 0 \tag{79}$$

in einem beliebigen Grundbereich $\mathfrak{B}$. Und zwar betrachten wir nur solche Lösungen, die in der Nachbarschaft der trivialen Lösung $u \equiv 0$ verlaufen, d. h. kleine Lösungen zu kleinen Randwerten. Sind s und t Punktvariable (statt x, y und ξ, η) und bedeutet $G(s, t)$ die *Green*sche Funktion der Potentialtheorie, so ist (79) gleichwertig der Integralgleichung

$$u(s) + \frac{1}{2\pi}\int G(s, t)\, \mathfrak{Sin}\, u(t)\, dt = v(s), \tag{80}$$

wo $v(s)$ die durch die gegebenen Randwerte bestimmte Potentialfunktion bedeutet. Als ausschlaggebende homogene lineare Integralgleichung tritt an die Stelle von (3)

$$\varphi(s) + \frac{1}{2\pi}\int G(s, t)\varphi(t)\, dt = 0. \tag{81}$$

Wir wollen annehmen, das Gebiet $\mathfrak{B}$ sei so beschaffen, daß (81) genau n voneinander unabhängige Eigenfunktionen $\varphi_1(s), \ldots, \varphi_n(s)$ besitzt und daß die auf der rechten Seite von (80) auftretende Potentialfunktion $v(s)$ nicht zu allen $\varphi_\nu(s)$ orthogonal ist. Dann werden wir beweisen: *Zu der rechten Seite*

$$v(s) = \mu \cdot k(s), \tag{82}$$

wo also $k(s)$ nicht zu allen $\varphi_\nu(s)$ orthogonal ist, *gibt es genau eine genügend kleine reelle Lösung von* (80) *bei genügend kleinem* μ.

Da in der Entwicklung von $\mathfrak{Sin}\, u(t)$ die Koeffizientenfunktion $a_1(t) \equiv 1$ ist, stimmen nach (31) die Eigenfunktionen $\varphi_\nu(t)$ mit den $\psi_\nu(t)$ überein. In der zu $k(s)$ orthogonalen $(n-1)$-parametrigen Schar der Eigenfunktionen von (81) wählen wir als normierte orthogonale Basis $\varphi_2(s), \ldots, \varphi_n(s)$ irgendwie aus und bestimmen dazu $\varphi_1(s)$ gemäß den Normierungs- und Orthogonalitätsbedingungen. Dann setzen wir analog (75)

$$p_1(s) = k(s), \quad p_\nu(s) = \psi_\nu(s) = \varphi_\nu(s) \qquad (\nu > 1), \tag{83}$$

wobei wir $(k, \psi_1) = (k, \varphi_1) = 1$ annehmen dürfen. In den Verzweigungsgleichungen (77) verschwinden die $L_2^{(\mu)}$ identisch, und wir haben nach den Ausführungen des vorigen Para-

graphen zunächst zu bestimmen, wieviel normierte Eigenfunktionen $\alpha_1(s)$ von (81) die $n-1$ Gleichungen

$$L_3^{(2)} = 0, \qquad L_3^{(3)} = 0, \ldots, L_3^{(n)} = 0 \tag{84}$$

gleichzeitig befriedigen. Es soll zuerst gezeigt werden, daß es *höchstens eine* solche Lösung gibt.

Die Größen $L_3^{(\nu)}$ haben unter Beachtung von (19) die folgende Gestalt:

$$L_3^{(\nu)} = \frac{\varkappa_\nu}{6}\int \varphi_\nu(t)\,(\sigma_{11}\varphi_1(t) + \sigma_{12}\varphi_2(t) + \cdots + \sigma_{1n}\varphi_n(t))^3\,dt, \tag{85}$$

worin die $\varkappa_\nu$ nach (32) von Null verschiedene Zahlen sind, nämlich alle $\varkappa_\nu = 1$. Daraus sieht man sofort, daß die Gleichungen (84) keine Lösung besitzen, für die $\sigma_{11} = 0$ ist; denn es müßte auch $\sum_{\nu=2}^{n}\sigma_{1\nu}L_3^{(\nu)} = 0$ sein, was nicht angeht, da dann unter dem Integralzeichen nur eine vierte Potenz steht. Würde es nun zwei normierte Eigenfunktionen geben, die (84) zum Verschwinden bringen, so könnte man sie so mit Konstanten multiplizieren, daß σ_{11} in beiden den gleichen Wert erhält. Man braucht daher nur solche Lösungen zu betrachten, die gleiches σ_{11} besitzen.

Sehr einfach erledigt sich der Fall $n = 2$. Das Gleichungssystem (84) reduziert sich dann auf die einzige Gleichung

$$L_3^{(2)} \equiv \frac{1}{6}\int \varphi_2(t)\,(\sigma_{11}\varphi_1(t) + \sigma_{12}\varphi_2(t))^3\,dt = 0. \tag{87}$$

Gäbe es zwei Lösungen mit gleichem σ_{11} und verschiedenem $\sigma_{12}^{(1)}$ bzw. $\sigma_{12}^{(2)}$, so gäbe es einen dazwischenliegenden Wert σ_{12}^{*}, für den

$$\int \varphi_2(t)\,(\sigma_{11}\varphi_1(t) + \sigma_{12}^{*}\varphi_2(t))^2\,\varphi_2(t)\,dt = 0$$

sein müßte, was nicht möglich ist.

Im Falle $n = 3$ hat man die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}\int \varphi_2(t)\,(\sigma_{11}\varphi_1(t) + \sigma_{12}\varphi_2(t) + \sigma_{13}\varphi_3(t))^3\,dt &= 0,\\ \int \varphi_3(t)\,(\sigma_{11}\varphi_1(t) + \sigma_{12}\varphi_2(t) + \sigma_{13}\varphi_3(t))^3\,dt &= 0.\end{aligned} \tag{88}$$

Angenommen, es gäbe zwei Lösungen. Ist sowohl $\sigma_{12}^{(1)} \neq \sigma_{12}^{(2)}$ als auch $\sigma_{13}^{(1)} \neq \sigma_{13}^{(2)}$, so führe man statt $\varphi_2(t)$ und $\varphi_3(t)$ durch die Transformation

$$\begin{aligned}\varphi_2(t) &= d_{22}\,\Phi_2(t) + d_{23}\,\Phi_3(t),\\ \varphi_3(t) &= d_{32}\,\Phi_2(t) + d_{33}\,\Phi_3(t),\end{aligned}$$

deren Determinante $||\,d_{\nu\mu}\,|| \neq 0$ sei, die Funktionen $\Phi_2(t)$ und $\Phi_3(t)$ ein, die gleichfalls Eigenfunktionen von (3) sind. Dabei unterwerfe man d_{22} und d_{32} noch der Bedingung, daß nach der Transformation die Koeffizienten von $\Phi_2(t)$ in beiden Lösungen übereinstimmen; das liefert

$$d_{22} = \frac{(\sigma_{13}^{(2)} - \sigma_{13}^{(1)})\,d_{32}}{\sigma_{12}^{(1)} - \sigma_{12}^{(2)}}.$$

Das Gleichungssystem (88) ist nun gleichwertig dem System

$$\begin{aligned}\int \Phi_2(t)\,(\sigma_{11}\varphi_1(t) + \Sigma_{12}\Phi_2(t) + \Sigma_{13}\Phi_3(t))^3\,dt &= 0,\\ \int \Phi_3(t)\,(\sigma_{11}\varphi_1(t) + \Sigma_{12}\Phi_2(t) + \Sigma_{13}\Phi_3(t))^3\,dt &= 0,\end{aligned} \tag{89}$$

welches nach der Voraussetzung zwei Lösungen besitzen soll, die sich nur in $\Sigma_{13}^{(1)} \neq \Sigma_{13}^{(2)}$ unterscheiden. Anwendung des Mittelwertsatzes für die einzige Variable Σ_{13} auf die

zweite Gleichung (89) liefert den gleichen Widerspruch, der früher bei $n = 2$ erhalten wurde.

Im Falle eines beliebigen n zeigt die gleiche Überlegung — Ersetzung von $\varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ durch geeignet gewählte $\Phi_2(t), \ldots, \Phi_n(t)$ —, daß es *höchstens eine* Lösung des Gleichungssystems (84) geben kann. Außerdem zeigt sie, daß die Behauptung für jeden ungeraden Exponenten $2m + 1$ an Stelle von 3 zu Recht besteht.

Jetzt ist nachzuweisen, daß die $n - 1$ Gleichungen (84) *auch wirklich* durch eine normierte Eigenfunktion von (3) *befriedigt* werden können. Im Falle $n = 2$ ist das wieder trivial, da (87) eine Gleichung dritten Grades für σ_{12} ist, in der der Koeffizient von σ_{12}^3 nicht verschwindet. Aber auch im Falle eines beliebigen n ist dies nicht schwer zu sehen. Wenn man beim Beweise nur Überlegungen benutzen will, die den bisher in der Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen angestellten ähnlich sind, so kann man etwa so schließen: Die Gleichungen (84) sind bei festem σ_{11} $n - 1$ Gleichungen für die $n - 1$ Unbekannten $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \ldots, \sigma_{1n}$. Nun gilt aber das grundlegende Theorem [11]), daß die eindeutige Lösbarkeit von n Gleichungen mit n Unbekannten in der Umgebung eines Lösungssystems durch das Nichtverschwinden der Funktionaldeterminante angezeigt wird. Dabei kann man offenbar bei Benutzung dieses *Umgebungssatzes*, wenn man in den Größen (85) die vor der Klammer stehenden Funktionen $\varphi_\nu(t)$ etwas abändert, zur Darstellung der in der Klammer auftretenden Eigenfunktion von (3) die alten Funktionen $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ benutzen und auch den Wert von σ_{11} festhalten. — Der Schluß verläuft jetzt so: Sicher gibt es eine normierte Eigenfunktion $\varphi_1^*(t)$ von (3) so, daß dazu eine gleichfalls normierte Eigenfunktion $\alpha_1^*(t)$ gehört, deren dritte Potenz auf allen $n - 1$ zu $\varphi_1^*(t)$ orthogonalen Eigenfunktionen von (3) orthogonal ist; man braucht ja nur etwa von $\alpha_1^*(t)$ auszugehen. Wollen wir nun die Existenz einer normierten Eigenfunktion $\alpha_1(t)$ von (3) beweisen, die auf allen zu einem vorgelegten $\varphi_1(t)$ orthogonalen Eigenfunktionen orthogonal ist, d. h. die Gleichungen (84) befriedigt, so brauchen wir in der Schar der normierten Eigenfunktionen von (3) nur $\varphi_1^*(t)$ irgendwie stetig in $\varphi_1(t)$ überzuführen. Mit Hilfe des oben zitierten Umgebungssatzes kann man dann die zu $\varphi_1^*(t)$ gehörende Funktion $\alpha_1^*(t)$ längs dieses Verbindungsweges fortsetzen, wenn noch gezeigt wird, daß längs des ganzen Weges die Funktionaldeterminante des Gleichungssystems (84) nicht verschwindet. Am Anfang des Weges ist sie mit Benutzung von (85) bis auf von Null verschiedene Faktoren gleich

$$\|\int \varphi_\nu^*(t)\,\alpha_1^*(t)^2\,\varphi_\mu^*(t)\,dt\| \qquad (\nu, \mu = 2, 3, \ldots, n-1, n), \tag{90}$$

wenn $\alpha_1^*(t) = \sigma_{11}^* \varphi_1^*(t) + \cdots + \sigma_{1n}^* \varphi_n^*(t)$ gesetzt ist. Die Gramsche Determinante (90) ist aber von Null verschieden, da die $n - 1$ Funktionen

$$\varphi_2^*(t)\,\alpha_1^*(t), \quad \varphi_3^*(t)\,\alpha_1^*(t), \ldots, \varphi_n^*(t)\,\alpha_1^*(t)$$

voneinander unabhängig sind. Die gleiche Betrachtung gilt an jeder Stelle des Verbindungsweges; man erhält demnach durch diesen Fortsetzungsprozeß die gesuchte Funktion $\alpha_1(t) = \sigma_{11}^{(0)} \varphi_1(t) + \cdots + \sigma_{1n}^{(0)} \varphi_n(t)$. — Jetzt wissen wir also, daß es stets *eine und nur eine* normierte Eigenfunktion von (3) gibt, die die Gleichungen (84) erfüllt.

Schließlich ist noch zu untersuchen, wieviel reelle Lösungen $\lambda_1 + \mu$ die n Gleichungen (77) besitzen, wobei man noch die $\sigma_{11}^{(0)}, \ldots, \sigma_{1n}^{(0)}$ ein wenig zu variieren hat. Die $n - 1$ letzten Gleichungen seien dabei durch $(\lambda_1 + \mu)^3$ durchdividiert gedacht.

---

[11]) Dieser Satz entspricht dem Fall der eindeutigen Lösbarkeit in § 5 der Schmidtschen Arbeit und läßt sich analog beweisen.

Zunächst sieht man sofort, daß $L_3^{(1)} \neq 0$ ausfällt, wenn man darin $\alpha_1(t) = \sigma_{11}^{(0)} \varphi_1(t) + \cdots + \sigma_{1n}^{(0)} \varphi_n(t)$ einsetzt. Denn sonst würden die Größen (85) für $\nu = 1, 2, \ldots, n$ verschwinden und daher müßte auch $\int \alpha_1(t)\, \alpha_1^3(t)\, dt = 0$ gelten, was einen Widerspruch liefert. Daß nun die Gleichungen (77) genau eine Lösung besitzen, folgt daher im Falle $n = 2$ aus den Betrachtungen am Schluß des § 3.

Im Falle eines beliebigen n wird man aus der ersten Gleichung (77) $\lambda_1 + \mu$ als Potenzreihe in $\sqrt[3]{\mu}$ mit von $\sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{1n}$ abhängenden Koeffizienten darstellen. Es gibt genau eine reelle solche Potenzreihe $\lambda_1 + \mu = P(\sqrt[3]{\mu}; \sigma_{11}, \sigma_{12}, \ldots, \sigma_{1n})$, deren absolutes Glied übrigens verschwindet. Diese setze man in die übrigen $n - 1$ Gleichungen (77) ein, die jetzt bei festgehaltenem $\sigma_{11} = \sigma_{11}^{(0)}$ $n - 1$ Gleichungen für die $n - 1$ Unbekannten $\sigma_{12}, \sigma_{13}, \ldots, \sigma_{1n}$ werden. Nach dem schon auf S. 171 benutzten Umgebungssatz, der auch zu Recht besteht, wenn die Gleichungen nicht algebraisch sind, sondern Potenzreihen enthalten, gibt es nun zu jedem genügend kleinen $\lambda_1 + \mu$ eine und nur eine wenig von $\alpha_1(t)$ verschiedene Eigenfunktion $\bar{\alpha}_1(t)$ von (3), die diesen Gleichungen genügt; die Funktionaldeterminante ist nämlich für $\sqrt[3]{\mu} = 0$ der in (90) betrachteten analog und daher von Null verschieden. Dieses $\bar{\alpha}_1(t)$ erfüllt somit sämtliche n Gleichungen (77) und ist die einzige reelle Funktion mit vorgegebenem σ_{11}, die allen diesen Forderungen genügt. Wegen des festen Koeffizienten σ_{11} ist $\bar{\alpha}_1(t)$ natürlich nicht normiert, was jedoch an den früheren Überlegungen nichts Wesentliches ändert.

Damit ist der auf S. 169 ausgesprochene Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Gleichung $\Delta u + \mathfrak{Sin}\, u = 0$ in aller Strenge bewiesen. Die hier durchgeführte Beweismethode führt natürlich auch bei viel allgemeineren nichtlinearen Integralgleichungen zum Ziel.

Eingegangen 8. Juli 1930.

Über die Darstellungen einer Zahl als Differenz von zwei Produkten.

Von *Theodor Estermann* in London.

Einleitung.

Es seien k und n zwei beliebige natürliche Zahlen. Dann betrachte ich die Anzahl $v(n, k)$ der Systeme von je vier natürlichen Zahlen x, y, z, u, die den Bedingungen $xy - zu = k$ und $xy \leqq n$ genügen, also die Anzahl der Darstellungen der Zahl k als Differenz von zwei Produkten, deren erstes $\leqq n$ ist. Offenbar ist $v(n, k) = \sum_{m=1}^{n-k} d(m)\, d(m+k)$, wo $d(m)$ die Anzahl der positiven Teiler von m bezeichnet. Herr Ingham[1]) hat gezeigt, daß bei festem k die Formel

$$v(n, k) = \frac{6}{\pi^2}\, \sigma_{-1}(k)\, n \log^2 n + O\,(n \log n)$$

gilt, wo $\sigma_w(k) = \sum_{d \mid k} d^w$ ist. Ich werde hier den wesentlich schärferen Satz beweisen:

Zu jedem k gibt es zwei Zahlen a_1 und a_2, so daß für jedes $w > \frac{17}{6}$ (also z. B. für $w = 3$)

$$v(n, k) = \frac{6}{\pi^2}\, \sigma_{-1}(k)\, n \log^2 n + a_1\, n \log n + a_2\, n + O\,(n^{\frac{11}{12}} \log^w n) \quad \textit{ist.}$$

Bezeichnungen.

Die Buchstaben j und q bedeuten durchweg ganze Zahlen, die Buchstaben $h, k, l, m, n, r, s, t, u, x, y$ und z natürliche Zahlen.

Alle Abschätzungen, in denen ε vorkommt, sollen für jedes positive ε gelten.

Die Buchstaben $A_1, A_2, \ldots$ bezeichnen passend zu wählende positive Zahlen, die höchstens von ε abhängen.

Alle O-Abschätzungen sollen gleichmäßig in allen Veränderlichen außer k und ε gelten.

Kompliziertere Summen, besonders solche, bei denen die übliche Bezeichnungsweise zu Mißverständnissen führen könnte, bezeichne ich auf folgende Art: Die Summationsvariablen stehen unmittelbar unter dem Summenzeichen, die Summationsbedingungen eine Zeile tiefer. Für die meisten Summationsbedingungen verwende ich Zahlen als Abkürzungen. Diese haben die folgenden Bedeutungen:

1:	$xy - zu = k,$
2:	$xy \leqq n,$
3:	$x < y,$
4:	$z < u,$

[1]) Journal London Math. Soc. **2** (1927), 202—205.

5: $$x \leqq \sqrt{z^2 + k},$$

6: $$z^2 < x^2 - k,$$

7: $$z < \sqrt{n - k},$$

8: $$(x, z) \mid k$$

((x, z) bezeichnet den größten gemeinsamen Teiler von x und z),

9: $$x < \sqrt{n},$$

10: $$(x, z) = m,$$

11: $$y \equiv \frac{k}{m}\left[\frac{x}{m}, \frac{z}{m}\right] \pmod{\frac{z}{m}}$$

(das Symbol $[q, r]$ wird später erklärt werden),

12: $$z^2 + k < xy \leqq n,$$

13: $$u \equiv -\frac{k}{m}\left[\frac{z}{m}, \frac{x}{m}\right] \pmod{\frac{x}{m}},$$

14: $$x^2 - k < zu \leqq n - k,$$

15: $$s < \frac{\sqrt{n}}{m},$$

16: $$t < \frac{\sqrt{n - k}}{m},$$

17: $$(s, t) = 1,$$

18: $$rh < \frac{\sqrt{n}}{m},$$

19: $$rl < \frac{\sqrt{n - k}}{m},$$

20: $$s \leqq \sqrt{t^2 + km^{-2}},$$

21: $$h \leqq \sqrt{l^2 + km^{-2}r^{-2}},$$

22: $$\sqrt{1 + km^{-2}} < t < \frac{\sqrt{n}}{m},$$

23: $$s^2 < t^2 - km^2,$$

24: $$a < s \leqq b.$$

Erster Teil. Elementare Abschätzungen.

1. *Der Ansatz.* Es ist

(1) $$v(n, k) = \sum_{\substack{x,y,z,u \\ 1,2}} 1 = \sum_{\substack{x,y,z,u \\ 1,2,x \neq y,\, z \neq u}} 1 + \sum_{\substack{x,y,z,u \\ 1,2,x \neq y,\, z = u}} 1 + \sum_{\substack{x,y,z,u \\ 1,2,x = y}} 1.$$

Die letzten beiden Summen sind $O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})$, denn es ist z. B.

$$\sum_{\substack{x,y,z,u \\ 1,2,x=y}} 1 = \sum_{\substack{x \\ k < x^2 \leqq n}} d(x^2 - k) = \sum_{\substack{x \\ \sqrt{k} < x \leqq \sqrt{n}}} O(n^{\varepsilon}).$$

Aus (1) folgt daher

(2) $$v(n, k) = 4 \sum_{\substack{x,y,z,u \\ 1,2,3,4}} 1 + O(n^{\frac{1}{2}+\varepsilon}).$$

Ich setze

(3) $$v_1 = \sum_{\substack{x,y,z,u \\ 1,2,4,5}} 1$$

und

(4) $$v_2 = \sum_{\substack{x,y,z,u \\ 1,2,3,6}} 1 .$$

Dann ist nach (2)

(5) $$r(n,k) = 4\,(v_1 + v_2) + O(n^{\frac{1}{3}+\varepsilon}),$$

und nach (3) und (4) ist

(6) $$v_1 = \sum_{\substack{x,z \\ 5,7,8}} \sum_{\substack{y,u \\ 1,2,4}} 1$$

und

(7) $$v_2 = \sum_{\substack{x,z \\ 6,8,9}} \sum_{\substack{y,u \\ 1,2,3}} 1 .$$

Von nun an sei der Einfachheit halber stets

(8) $$n > k^2 + k .$$

Dann ist nach (6)

(9) $$v_1 = \sum_{m \mid k} \sum_{\substack{x,z \\ 5,7,10}} \sum_{\substack{y,u \\ 1,2,4}} 1$$

und nach (7)

(10) $$v_2 = \sum_{m \mid k} \sum_{\substack{x,z \\ 6,9,10}} \sum_{\substack{y,u \\ 1,2,3}} 1 .$$

Es bezeichne $[w]$ wie üblich die größte ganze Zahl $\leqq w$, und im Falle $(q,r) = 1$ sei $[q,r]$ durch

(11) $$q[q,r] \equiv 1 \pmod r, \qquad 0 < [q,r] \leqq r$$

definiert. Gelten dann $m \mid k$, 7 und 10, so ist

(12) $$\sum_{\substack{y,u \\ 1,2,4}} 1 = \sum_{\substack{y \\ 11,12}} 1 = \left[\frac{n\,m}{x\,z} - \frac{k}{z}\left[\frac{x}{m}, \frac{z}{m}\right]\right] - \left[\frac{(z^2+k)m}{x\,z} - \frac{k}{z}\left[\frac{x}{m}, \frac{z}{m}\right]\right],$$

und wenn $m \mid k$, 9 und 10 gelten, so ist

(13) $$\sum_{\substack{y,u \\ 1,2,3}} 1 = \sum_{\substack{u \\ 13,14}} 1 = \left[\frac{(n-k)m}{x\,z} + \frac{k}{x}\left[\frac{z}{m}, \frac{x}{m}\right]\right] - \left[\frac{(x^2-k)m}{z\,x} + \frac{k}{x}\left[\frac{z}{m}, \frac{x}{m}\right]\right].$$

Ich setze nun (für jedes reelle w)

(14) $$\psi(w) = w - [w] - \tfrac{1}{2}.$$

Ferner setze ich

(15) $$v_3(m) = \sum_{\substack{x,z \\ 5,7,10}} \frac{(n - z^2 - k)m}{x\,z} + \sum_{\substack{x,z \\ 6,9,10}} \frac{(n - x^2)m}{z\,x}$$

und

(16) $$\begin{aligned} &\Delta_1(m) = \sum_{\substack{x,z \\ 5,7,10}} \psi\left(\frac{n\,m}{x\,z} - \frac{k}{z}\left[\frac{x}{m}, \frac{z}{m}\right]\right), \quad \Delta_2(m) = \sum_{\substack{x,z \\ 5,7,10}} \psi\left(\frac{(z^2+k)\,m}{x\,z} - \frac{k}{z}\left[\frac{x}{m}, \frac{z}{m}\right]\right), \\ &\Delta_3(m) = \sum_{\substack{x,z \\ 6,9,10}} \psi\left(\frac{(n-k)\,m}{z\,x} + \frac{k}{x}\left[\frac{z}{m}, \frac{x}{m}\right]\right), \quad \Delta_4(m) = \sum_{\substack{x,z \\ 6,9,10}} \psi\left(\frac{(x^2-k)\,m}{z\,x} + \frac{k}{x}\left[\frac{z}{m}, \frac{x}{m}\right]\right). \end{aligned}$$

Dann ist nach (9), (10), (12) und (13)

$$(17)\qquad v_1 + v_2 = \sum_{m \mid k} \{ v_3(m) - \Delta_1(m) + \Delta_2(m) - \Delta_3(m) + \Delta_4(m) \}.$$

Setze ich also

$$(18)\quad v_4 = \sum_{m \mid k} v_3(m), \quad \Delta = \sum_{m \mid k} \{ -\Delta_1(m) + \Delta_2(m) - \Delta_3(m) + \Delta_4(m) \},$$

so ist nach (5)

$$(19)\qquad v(n,k) = 4\, v_4 + 4\Delta + O(n^{\frac{1}{3}+\varepsilon}).$$

2. *Berechnung von* v_4. Es ist offenbar

$$(20)\qquad \sum_{\substack{x,z \\ 5,7,10}} x^{-1} z^{-1} = O(\log^2 n).$$

Setze ich also

$$(21)\quad v_5 = \sum_{\substack{x,z \\ 5,7,10}} x^{-1} z^{-1} + \sum_{\substack{x,z \\ 6,9,10}} x^{-1} z^{-1}, \qquad v_6 = \sum_{\substack{x,z \\ 5,7,10}} z\, x^{-1}, \qquad v_7 = \sum_{\substack{x,z \\ 6,9,10}} x\, z^{-1},$$

so ist nach (15)

$$(22)\qquad m^{-1} v_3(m) = n\, v_5 - v_6 - v_7 + O(\log^2 n).$$

Nun ist, wenn $\mu(r)$ die Moebiussche Funktion bezeichnet und $x = ms$, $z = mt$ gesetzt wird, nach (21)

$$(23)\quad \begin{aligned} v_5 &= \sum_{\substack{x,z \\ 7,9,10}} x^{-1} z^{-1} = \sum_{\substack{s,t \\ 15,16,17}} m^{-2} s^{-1} t^{-1} = m^{-2} \sum_{\substack{s,t \\ 15,16}} s^{-1} t^{-1} \sum_{\substack{r,h,l \\ rh=s,\, rl=t}} \mu(r) \\ &= m^{-2} \sum_{\substack{r,h,l \\ 18,19}} \mu(r)\, r^{-2} h^{-1} l^{-1} = m^{-2} \sum_{r \leqq \sqrt{n-k}/m} \mu(r)\, r^{-2} \sum_{h < \frac{\sqrt{n}}{mr}} h^{-1} \sum_{l < \frac{\sqrt{n-k}}{mr}} l^{-1}. \end{aligned}$$

Es ist ferner (wegen $m \mid k$ und $k = O(1)$)

$$(24)\quad \sum_{h < \frac{\sqrt{n}}{mr}} h^{-1} = \log \frac{\sqrt{n}}{mr} + \gamma + O\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right), \qquad \sum_{l < \frac{\sqrt{n-k}}{mr}} l^{-1} = \log \frac{\sqrt{n}}{mr} + \gamma + O\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right),$$

wo γ die Eulersche Konstante bezeichnet. Nach (23) ist daher

$$\begin{aligned} v_5 &= m^{-2} \sum_{r \leqq \sqrt{n-k}/m} \mu(r)\, r^{-2} \left(\log \frac{\sqrt{n}}{mr} + \gamma \right)^2 + O(n^{-\frac{1}{3}} \log^2 n) \\ &= m^{-2} \sum_{r=1}^{\infty} \mu(r)\, r^{-2} \left\{ \left(\log \frac{\sqrt{n}}{m} + \gamma \right)^2 - 2 \log r \left(\log \frac{\sqrt{n}}{m} + \gamma \right) + \log^2 r \right\} + O(n^{-\frac{1}{3}} \log^2 n). \end{aligned}$$

Bezeichne ich mit a' und a'' die erste und zweite Ableitung von $\dfrac{1}{\zeta(s)}$ für $s = 2$, so ist

$$(26)\quad \sum_{r=1}^{\infty} \mu(r)\, r^{-2} = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}, \quad -\sum_{r=1}^{\infty} \mu(r)\, r^{-2} \log r = a', \quad \sum_{r=1}^{\infty} \mu(r) \log^2 r = a''.$$

Nach (25) ist also

$$(27)\quad v_5 = m^{-2} \left\{ \frac{6}{\pi^2} \left(\log \frac{\sqrt{n}}{m} + \gamma \right)^2 + 2\, a' \left(\log \frac{\sqrt{n}}{m} + \gamma \right) + a'' \right\} + O(n^{-\frac{1}{3}} \log^2 n).$$

Ich berechne jetzt v_6 und v_7. Nach (21) ist (wenn wieder $x = ms$, $z = mt$ gesetzt wird)

$$(28)\quad v_6 = \sum_{\substack{t,s \\ 16,17,20}} t s^{-1} = \sum_{\substack{t,s \\ 16,20}} t s^{-1} \sum_{\substack{r,h,l \\ rh=s,\, rl=t}} \mu(r) = \sum_{\substack{r,h,l \\ 19,21}} \mu(r)\, l h^{-1} = \sum_{r \leqq \sqrt{n-k}/m} \mu(r) \sum_{l < \frac{\sqrt{n-k}}{mr}} l \sum_{h \leqq \sqrt{l^2 + k m^{-2} r^{-2}}} h^{-1}.$$

Es ist ferner

$$\sum_{h \leqq \sqrt{l^2 + k m^{-2} r^{-2}}} h^{-1} = \log l + \gamma + O\,(l^{-1}) \tag{29}$$

und

$$\sum_{l < \frac{\sqrt{n-k}}{mr}} (l \log l + l\gamma) = \frac{n}{2m^2r^2} \log \frac{\sqrt{n}}{mr} - \frac{n}{4m^2r^2} + \frac{\gamma n}{2m^2r^2} + O\left(\frac{\sqrt{n}}{r} \log n\right). \tag{30}$$

Nach (28) und (26) ist also

$$\begin{aligned} r_6 &= \sum_{r \leqq \sqrt{n-k}/m} \mu(r) \frac{n}{2m^2r^2} \left(\log \frac{\sqrt{n}}{mr} + \gamma - \frac{1}{2}\right) + O\,(\sqrt{n} \log^2 n) \\ &= \frac{n}{2m^2} \sum_{r=1}^{\infty} \mu(r)\, r^{-2} \left(\log \frac{\sqrt{n}}{m} + \gamma - \frac{1}{2} - \log r\right) + O\,(\sqrt{n} \log^2 n) \\ &= \frac{n}{2m^2} \left\{\frac{6}{\pi^2} \left(\log \frac{\sqrt{n}}{m} + \gamma - \frac{1}{2}\right) + a'\right\} + O\,(\sqrt{n} \log^2 n). \end{aligned} \tag{31}$$

Ebenso findet man

$$r_7 = \frac{n}{2m^2} \left\{\frac{6}{\pi^2} \left(\log \frac{\sqrt{n}}{m} + \gamma - \frac{1}{2}\right) + a'\right\} + O\,(\sqrt{n} \log^2 n). \tag{32}$$

Aus (22), (27), (31) und (32) folgt

$$\begin{aligned} r_3(m) = \frac{n}{m} \left\{\frac{6}{\pi^2} \left(\left(\log \frac{\sqrt{n}}{m} + \gamma - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) + 2a' \left(\log \frac{\sqrt{n}}{m} + \gamma - \frac{1}{2}\right) + a''\right\} \\ + O\,(\sqrt{n} \log^2 n). \end{aligned} \tag{33}$$

Ich setze nun mit Ramanujan

$$\sigma'_{-1}(k) = \sum_{m \mid k} m^{-1} \log m, \quad \sigma''_{-1}(k) = \sum_{m \mid k} m^{-1} \log^2 m. \tag{34}$$

Dann ist nach (18) und (33)

$$\begin{aligned} 4\, r_4 = n \left\{\left(\frac{6}{\pi^2} (\log n + 2\gamma - 1)^2 + \frac{6}{\pi^2} + 4a' (\log n + 2\gamma - 1) + 4a''\right) \sigma_{-1}(k) \right. \\ \left. - \left(\frac{24}{\pi^2} (\log n + 2\gamma - 1) + 8a'\right) \sigma'_{-1}(k) + \frac{24}{\pi^2} \sigma''_{-1}(k)\right\} + O\,(\sqrt{n} \log^2 n). \end{aligned} \tag{35}$$

Setze ich also

$$\begin{aligned} a_1 &= \left\{\frac{12}{\pi^2} (2\gamma - 1) + 4a'\right\} \sigma_{-1}(k) - \frac{24}{\pi^2} \sigma'_{-1}(k), \\ a_2 &= \left\{\frac{6}{\pi^2} (2\gamma - 1)^2 + \frac{6}{\pi^2} + 4a' (2\gamma - 1) + 4a''\right\} \sigma_{-1}(k) \\ &\quad - \left\{\frac{24}{\pi^2} (2\gamma - 1) + 8a'\right\} \sigma'_{-1}(k) + \frac{24}{\pi^2} \sigma''_{-1}(k), \end{aligned} \tag{36}$$

so ist

$$4\, r_4 = \frac{6}{\pi^2} \sigma_{-1}(k) n \log^2 n + a_1 n \log n + a_2 n + O(\sqrt{n} \log^2 n). \tag{37}$$

Zweiter Teil. Abschätzung von Δ.

Nach (16) ist (wenn wieder $x = ms$, $z = mt$ gesetzt wird)

$$\Delta_1(m) = \sum_{\substack{s,t \\ 16\ 17,20}} \psi\left(\frac{n}{mst} - \frac{k}{mt} [s, t]\right), \quad \Delta_2(m) = \sum_{\substack{s,t \\ 16.17,20}} \psi\left(\frac{m^2t^2 + k}{mst} - \frac{k}{mt} [s, t]\right). \tag{38}$$

Ich setze nun

$$(39)\qquad \delta_1(t) = \sum_{\substack{s \\ 17,20}} \psi\left(\frac{n}{mst} - \frac{k}{mt}\,[s,t]\right), \qquad \delta_2(t) = \sum_{\substack{s \\ 17,20}} \psi\left(\frac{m^2t^2+k}{mst} - \frac{k}{mt}\,[s,t]\right).$$

Dann ist nach (38)

$$(40)\qquad \Delta_1(m) = \sum_{\substack{t \\ 16}} \delta_1(t), \qquad \Delta_2(m) = \sum_{\substack{t \\ 16}} \delta_2(t).$$

Um $\delta_1(t)$ und $\delta_2(t)$ abzuschätzen, leite ich zunächst einige Hilfssätze her.

Ich setze für beliebige ganze Zahlen q und j

$$(41)\qquad S(q,j;t) = \sum_{\substack{s \\ 17,\, s\leqq t}} \exp\left\{\frac{2\pi i}{t}\,(qs + j[s,t])\right\}.$$

Dann gilt [2])

$$(42)\qquad |S(q,j;t)| \leqq d^{\frac{3}{4}}\left(\frac{t}{(q,t)}\right) t^{\frac{3}{4}}\,(q,t)^{\frac{1}{4}}.$$

Es ist nun leicht einzusehen, daß $S(q,j;t) = S(j,q;t)$ ist. Nach (42) ist also auch

$$(43)\qquad |S(j,q;t)| \leqq d^{\frac{3}{4}}\left(\frac{t}{(q,t)}\right) t^{\frac{3}{4}}\,(q,t)^{\frac{1}{4}}.$$

Hilfssatz 1. *Es sei*

$$(44)\qquad 0 \leqq a < b \leqq t.$$

Dann ist

$$(45)\qquad \left|\sum_{\substack{s \\ 17,24}} \exp\left\{\frac{2\pi i}{t}\,(js + q[s,t])\right\}\right| < d^{\frac{3}{4}}\left(\frac{t}{(q,t)}\right) t^{\frac{3}{4}}\,(q,t)^{\frac{1}{4}} \log(4t).$$

Beweis. Setze ich

$$(46)\qquad c_h = t^{-1} \sum_{\substack{s \\ 24}} e^{-2\pi i h s/t},$$

so ist

$$(47)\qquad \sum_{h=1}^{t}{}' c_h e^{2\pi i h s/t} = \begin{cases} 1 & (s = [a]+1,\quad [a]+2,\ldots,[b]) \\ 0 & (s = 1,2,\ldots,[a],\quad [b]+1,\ldots,t). \end{cases}$$

Nach (41) ist also

$$(48)\qquad \sum_{\substack{s \\ 17,24}} \exp\left\{\frac{2\pi i}{t}\,(js + q[s,t])\right\} = \sum_{h=1}^{t} c_h S(j+h,q;t).$$

Aus (46) folgt nun leicht $\sum_{h=1}^{t}{}' |c_h| < \log(4t)$, und hieraus und aus (48) und (43) folgt (45).

Hilfssatz 2. *Es sei w eine beliebige reelle Zahl, und es gelte* (44). *Dann ist*

$$(49)\qquad \left|\sum_{\substack{s \\ 17,24}} \exp\left\{\frac{2\pi i}{t}\,(ws + q[s,t])\right\}\right| < 5\,d^{\frac{3}{4}}\left(\frac{t}{(q,t)}\right) t^{\frac{3}{4}}\,(q,t)^{\frac{1}{4}} \log(4t).$$

Beweis. Ich setze $j = [w + \frac{1}{2}]$ (so daß $|j - w| \leqq \frac{1}{2}$ ist) und

$$(50)\qquad c_s = \exp\left\{\frac{2\pi i}{t}\,(w-j)\,s\right\},$$

$$d_s = \begin{cases} \exp\left\{\frac{2\pi i}{t}\,(js + q[s,t])\right\} & \{(s,t) = 1\} \\ 0 & \{(s,t) > 1\} \end{cases}, \qquad D_s = \sum_{h=[a]+1}^{s} d_h.$$

---

[2]) Estermann, Vereinfachter Beweis eines Satzes von Kloosterman, Hamburger Abh. 7 (1929), 83 (9). Die Formel rührt im wesentlichen von den Herren Littlewood und Kloosterman her. $d^{\frac{3}{4}}(m)$ ist eine Abkürzung für $\{d(m)\}^{\frac{3}{4}}$.

Dann ist

$$(51)\quad \sum_{\substack{s\\17,24}} \exp\left\{\frac{2\pi i}{t}(ws + q[s,t])\right\} = \sum_{\substack{s\\24}} c_s d_s = c_{[b]} D_{[b]} + \sum_{s=[a]+1}^{[b]-1} (c_s - c_{s+1}) D_s .$$

Nach (50) und Hilfssatz 1 ist $|c_{[b]}| = 1$, $|c_s - c_{s+1}| < \frac{\pi}{t}$ und

$$|D_s| < d^{\frac{3}{4}}\left(\frac{t}{(q,t)}\right) t^{\frac{3}{4}} (q,t)^{\frac{1}{4}} \log(4t).$$

Aus (51) und (44) folgt daher (49).

Ich definiere jetzt die Funktion $g_v(w)$ für $0 < v < \frac{1}{4}$ und für jedes reelle w durch

$$(52)\quad g_v(w) = \begin{cases} 2 - \dfrac{|w|}{v} & (|w| < 2v) \\ 0 & (2v \leqq |w| \leqq \frac{1}{2}) \end{cases}, \quad g_v(w+1) = g_v(w).$$

Dann gilt offenbar

$$(53)\quad |\psi(w+\vartheta) - \psi(w)| < v + g_v(w) \qquad (-v < \vartheta < v).$$

Hilfssatz 3. *Es ist stets*

$$(54)\quad \left|\psi(w) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{j\\0<|j|\leqq v^{-2}}} \frac{1}{j} e^{2\pi i j w}\right| < 2 g_v(w) + v.$$

Beweis. Da beide Seiten von (54) in w die Periode 1 haben, so braucht der Satz nur für $|w| \leqq \frac{1}{2}$ bewiesen zu werden. Ich setze als bekannt voraus, daß stets $\left|\frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{j\\0<|j|\leqq r}} \frac{1}{j} e^{2\pi i j w}\right| < \frac{3}{2}$ ist. Hieraus folgt (54) sofort im Falle $|w| \leqq v$, da dann $g_v(w) \geqq 1$ ist. Im Falle $v < |w| \leqq \frac{1}{2}$ ist aber

$$\psi(w) + \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{j\\0<|j|\leqq v^{-2}}} \frac{1}{j} e^{2\pi i j w} = -\frac{1}{\pi} \sum_{j > v^{-2}} \frac{1}{j} \sin(2\pi j w) \qquad \text{und}$$

$$\left|\sum_{j>v^{-2}} \frac{1}{j} \sin(2\pi j w)\right| < v^2 |2w|^{-1} < v, \quad \text{woraus wiederum (54) folgt.}$$

Entwickelt man $g_v(w)$ in eine Fouriersche Reihe, so findet man

$$(55)\quad g_v(w) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} b_j e^{2\pi i j w},$$

wo

$$(56)\quad b_0 = 4v, \quad b_j = \sin^2(2\pi j v)\, \pi^{-2} j^{-2} v^{-1} \quad (j \neq 0)$$

ist. Aus (56) folgt

$$(57)\quad 0 \leqq b_j \leqq 4v$$

und

$$(58)\quad b_j \leqq \pi^{-2} j^{-2} v^{-1} \quad (j \neq 0).$$

Hilfssatz 4. *Es seien C und D zwei beliebige reelle Zahlen,*

$$(59)\quad t \geqq v^{-1} > 4,$$

und es gelte (44). *Dann ist*

$$(60)\quad \sum_{\substack{s\\17,24}} g_v\left(C + Ds - \frac{q}{t}[s,t]\right) < 4v(b-a) + A_1 t^{\frac{3}{4}} d^{\frac{3}{4}+\varepsilon}(t) (q,t)^{\frac{1}{4}} \log t.$$

Beweis. Nach (55) und (56) ist

$$\sum_{\substack{s\\17,24}} g_v\left(C+Ds-\frac{q}{t}[s,t]\right)=4v\sum_{\substack{s\\17,24}}1+\sum_{j\neq 0}b_j e^{2\pi i C j}\sum_{\substack{s\\17,24}}\exp\left\{\frac{2\pi i}{t}(Djts-jq[s,t])\right\}.$$

Nach (57), (58) und Hilfssatz 2 ist daher {da $(jq,t)\leqq(j,t)(q,t)$ ist}

$$(61)\qquad \sum_{\substack{s\\17,24}} g_v\left(C+Ds-\frac{q}{t}[s,t]\right)<4v(b-a+1)$$
$$+A_2 t^{\frac{3}{4}}d^{\frac{3}{4}}(t)(q,t)^{\frac{1}{4}}\log t\left\{v\sum_{j=1}^{[1/v]}(j,t)^{\frac{1}{4}}+v^{-1}\sum_{j>1/v}j^{-2}(j,t)^{\frac{1}{4}}\right\}.$$

Nun ist $\sum_{j=1}^{[1/v]}(j,t)^{\frac{1}{4}}<\sum_{r\mid t}r^{\frac{1}{4}}v^{-1}r^{-1}=v^{-1}\sigma_{-\frac{3}{4}}(t)$ und

$$\sum_{j>1/v}j^{-2}(j,t)^{\frac{1}{4}}<\sum_{r\mid t}r^{\frac{1}{4}}\sum_{\substack{m\\rm>1/v}}(rm)^{-2}<2v\sum_{r\mid t}r^{-\frac{3}{4}}=2v\,\sigma_{-\frac{3}{4}}(t).$$

Es ist ferner leicht einzusehen, daß $\sigma_{-\frac{3}{4}}(t)=O\{d^{\varepsilon}(t)\}$ ist. Aus (61) folgt daher (60).

Hilfssatz 5. *Es sei ϑ_s so definiert, daß*

$$(62)\qquad -v<\vartheta_s<v\qquad(a<s\leqq b)$$

ist. Dann gilt unter den Voraussetzungen des vorigen Hilfssatzes

$$(63)\qquad \left|\sum_{\substack{s\\17,24}}\psi\left(C+Ds+\vartheta_s-\frac{q}{t}[s,t]\right)\right|<A_3 v(b-a)+A_4 t^{\frac{3}{4}}d^{\frac{3}{4}+\varepsilon}(t)(q,t)^{\frac{1}{4}}\log^2 t.$$

Beweis. Nach (53) und Hilfssatz 4 ist

$$(64)\qquad \left|\sum_{\substack{s\\17,24}}\psi\left(C+Ds+\vartheta_s-\frac{q}{t}[s,t]\right)-\sum_{\substack{s\\17,24}}\psi\left(C+Ds-\frac{q}{t}[s,t]\right)\right|<5v(b-a+1)$$
$$+A_1 t^{\frac{3}{4}}d^{\frac{3}{4}+\varepsilon}(t)(q,t)^{\frac{1}{4}}\log t.$$

Setze ich

$$(65)\qquad G=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\substack{s\\17,24}}\sum_{\substack{j\\0<|j|\leqq v^{-1}}}j^{-1}\exp\{2\pi i j\,(C+Ds-\frac{q}{t}[s,t])\},$$

so ist nach Hilfssatz 3 und Hilfssatz 4

$$(66)\qquad \left|\sum_{\substack{s\\17,24}}\psi(C+Ds-\frac{q}{t}[s,t])+G\right|<9v(b-a+1)+2A_1 t^{\frac{3}{4}}d^{\frac{3}{4}+\varepsilon}(t)(q,t)^{\frac{1}{4}}\log t.$$

Es ist aber nach (65) und Hilfssatz 2

$$(67)\qquad |G|<2t^{\frac{3}{4}}d^{\frac{3}{4}}(t)(q,t)^{\frac{1}{4}}\log(4t)\sum_{j=1}^{[v^{-1}]}j^{-1}(j,t)^{\frac{1}{4}},$$

und nach (59) ist $\sum_{j=1}^{[v^{-1}]}j^{-1}(j,t)^{\frac{1}{4}}\leqq\sum_{r\mid t}r^{\frac{1}{4}}\sum_{\substack{m\\rm\leqq v^{-1}}}(rm)^{-1}<3\sigma_{-\frac{3}{4}}(t)\log t.$ Hieraus und aus (64), (66) und (67) folgt (63).

Hilfssatz 6. *Es sei* $c\geqq\frac{1}{t}$, $t>4$, $0<a<b\leqq t$ *und*

$$(68)\qquad b-a\leqq c^{-\frac{1}{3}}a\,t^{\frac{1}{4}}d^{\frac{1}{4}}(t)(q,t)^{\frac{1}{12}}\log^{\frac{2}{3}}t.$$

Dann ist

$$(69)\qquad \Big|\sum_{\substack{s\\17,24}} \psi\left(\frac{c}{s}-\frac{q}{t}[s,t]\right)\Big| < A_5\, t^{\frac{3}{4}} d^{\frac{3}{4}+\varepsilon}(t)\,(q,t)^{\frac{1}{4}}\log^2 t.$$

Beweis. Im Falle $a \leqq 4c^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}}(t)\,(q,t)^{\frac{1}{6}}\log^{\frac{4}{3}} t$ ist der Satz trivial, denn dann folgt aus (68) $b-a \leqq 4t^{\frac{3}{4}} d^{\frac{3}{4}}(t)\,(q,t)^{\frac{1}{4}}\log^2 t$. Im andern Falle setze ich $v = c^{\frac{1}{3}} a^{-1} t^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}}(t)\,(q,t)^{\frac{1}{6}}\log^{\frac{4}{3}} t$ $C = 2ca^{-1}$, $D = -ca^{-2}$ und $\vartheta_s = c(s-a)^2 a^{-2} s^{-1}$. Dann folgt der Satz aus dem vorigen.

Hilfssatz 7. Es sei $c \geqq \frac{1}{t}$. *Dann ist*

$$(70)\qquad \Big|\sum_{\substack{s\\17,s\leqq t}} \psi\left(\frac{c}{s}-\frac{q}{t}[s,t]\right)\Big| < A_6\, c^{\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(t)\log^{\frac{7}{3}}(2t)\,(q,t)^{\frac{1}{6}} + A_7\, t^{\frac{3}{4}} d^{\frac{3}{4}+\varepsilon}(t)\,(q,t)^{\frac{1}{4}}\log^3(2t).$$

Beweis. Der Satz ist für $t \leqq 4$ trivial. Für $t > 4$ setze ich

$$(71)\qquad R = [\log(2t)/\log\{1 + c^{-\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{4}} d^{\frac{1}{4}}(t)\,(q,t)^{\frac{1}{12}}\log^{\frac{2}{3}}(2t)\}]$$

und $\quad b_j = \frac{1}{2}\{1 + c^{-\frac{1}{3}} t^{\frac{1}{4}} d^{\frac{1}{4}}(t)\,(q,t)^{\frac{1}{12}}\log^{\frac{2}{3}}(2t)\}^j \quad (0 \leqq j \leqq R), \quad b_{R+1} = t.$

Dann ist $\sum\limits_{\substack{s\\17,s\leqq t}} \psi\left(\frac{c}{s}-\frac{q}{t}[s,t]\right) = \sum\limits_{j=0}^{R} \sum\limits_{\substack{s\\17,b_j<s\leqq b_{j+1}}} \psi\left(\frac{c}{s}-\frac{q}{t}[s,t]\right)$ und daher nach Hilfssatz 6

$$(72)\qquad \Big|\sum_{\substack{s\\17,s\leqq t}} \psi\left(\frac{c}{s}-\frac{q}{t}[s,t]\right)\Big| < A_5\,(R+1)\,t^{\frac{3}{4}} d^{\frac{3}{4}+\varepsilon}(t)\,(q,t)^{\frac{1}{4}}\log^2 t.$$

Nun ist aber für $w > 0$ stets $\{\log(1+w)\}^{-1} < 1 + w^{-1}$. Nach (71) ist also

$$R < \log(2t) + c^{\frac{1}{3}} t^{-\frac{1}{4}} d^{-\frac{1}{4}}(t)\,(q,t)^{-\frac{1}{12}}\log^{\frac{1}{3}}(2t),$$

und hieraus und aus (72) folgt (70).

Nun sei $m \mid k$ und $mt < \sqrt{n}$. Wende ich dann Hilfssatz 7 mit $q = \frac{k}{m}$ und einerseits mit $c = \frac{n}{mt}$, andererseits mit $c = mt + \frac{k}{mt}$ an, so folgt aus (39)

$$(73)\qquad |\delta_1(t)| + |\delta_2(t)| = O\{n^{\frac{5}{12}}\log^{\frac{7}{3}} n\, d^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(t)\}.$$

Nun ist für $0 < w \leqq 1$

$$(74)\qquad \sum_{t=1}^{r} d^w(t) \leqq r^{1-w}\{\sum_{t=1}^{r} d(t)\}^w < A_8\, r\log^w(2r).$$

Nach (40) und (73) ist daher

$$(75)\qquad |\Delta_1(m)| + |\Delta_2(m)| = O(n^{\frac{11}{12}}\log^{\frac{17}{6}+\varepsilon} n).$$

$\Delta_3(m)$ und $\Delta_4(m)$ lassen sich ähnlich behandeln.
Setze ich $z = ms$ und $x = mt$, so ist nach (16)

$$(76)\quad \Delta_3(m) = \sum_{\substack{s,t\\17,22,23}} \psi\left(\frac{n-k}{mst}+\frac{k}{mt}[s,t]\right), \quad \Delta_4(m) = \sum_{\substack{s,t\\17,22,23}} \psi\left(\frac{m^2t^2-k}{mst}+\frac{k}{mt}[s,t]\right).$$

Setze ich also

$$(77)\quad \delta_3(t) = \sum_{\substack{s\\17,23}} \psi\left(\frac{n-k}{mst}+\frac{k}{mt}[s,t]\right), \quad \delta_4(t) = \sum_{\substack{s\\17,23}} \psi\left(\frac{m^2t^2-k}{mst}+\frac{k}{mt}[s,t]\right),$$

so ist

$$\Delta_3(m) = \sum_{\substack{t \\ 22}} \delta_3(t), \qquad \Delta_4(m) = \sum_{\substack{t \\ 22}} \delta_4(t). \tag{78}$$

Wende ich nun Hilfssatz 7 mit $q = -\frac{k}{m}$ und einerseits mit $c = \frac{n-k}{mt}$, andererseits mit $c = mt - \frac{k}{mt}$ an, so folgt aus (77)

$$|\delta_3(t)| + |\delta_4(t)| = O\{n^{\frac{5}{12}} \log^{\frac{7}{3}} n\, d^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(t)\}. \tag{79}$$

Nach (78) und (74) ist also

$$|\Delta_3(m)| + |\Delta_4(m)| = O\,(n^{\frac{11}{12}} \log^{\frac{17}{6}+\varepsilon} n). \tag{80}$$

Aus (18), (75) und (80) folgt $\Delta = O\,(n^{\frac{11}{12}} \log^{\frac{17}{6}+\varepsilon} n)$, und hieraus und aus (19) und (37) folgt

$$r(n,k) = \frac{6}{\pi^2}\sigma_{-1}(k)\, n \log^2 n + a_1\, n \log n + a_2\, n + O\,(n^{\frac{11}{12}} \log^{\frac{17}{6}+\varepsilon} n),$$

w. z. b. w.

Eingegangen 25. März 1930.

Reduktion simultaner partieller Differentialgleichungen bei hydrodynamischen Problemen.

Von *Wilhelm Kirchhoff* in Braunschweig.

Bekanntlich bietet die strenge Lösung hydrodynamischer Probleme, d. h. die Integration der Eulerschen Differentialgleichungen in Verbindung mit der sogenannten Kontinuitätsgleichung große Schwierigkeiten, zumal im Falle kompressibler Flüssigkeiten. Unter gewissen vereinfachenden Annahmen können wir jedoch zu partikulären Lösungen gelangen. Eine Methode, solche zu finden, ist folgende: Wir versuchen, das System dieser (simultanen) Gleichungen, in denen die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w, die Dichte ε und der Druck P die Unbekannten sind, zurückzuführen auf nur eine partielle Differentialgleichung, die es dann zu lösen gilt. Diese Reduktion ist unter gewissen vereinfachenden Annahmen von E. R. Neumann durchgeführt. (Crelles Journal 132, Seite 189 u. ff.)

Unter anderen Voraussetzungen will ich das Entsprechende tun, also gleichfalls das System dieser simultanen Gleichungen zurückführen auf nur eine partielle Differentialgleichung. Jede ihrer Lösungen gestattet, durch einfache Operationen die Geschwindigkeitskomponenten, die Dichte, die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen usw. zu berechnen. Das soll im ersten Paragraphen gezeigt werden. Im zweiten Paragraphen wird angegeben werden, wie partikuläre Lösungen der zunächst noch ziemlich verwickelten resultierenden Differentialgleichung gefunden werden können, indem sie auf eine einfache Form gebracht wird und zwar in dem weiter unten zu erörtenden „isothermen" Falle auf die bekannte „Telegraphengleichung" und in dem gleichfalls zu erwähnenden „adiabatischen" Falle auf eine ihr nahe verwandte Gleichung. Die beiden letzten Paragraphen enthalten Erweiterungen der Ergebnisse der beiden ersten Paragraphen.

§ 1. Die Strömungsfunktion bei eindimensionalen, nichtstationären Bewegungen.

Die unseren Ausführungen zugrunde liegenden einschränkenden Voraussetzungen sind folgende:

I. *Die Bewegung sei eindimensional und nichtstationär.* Also alle die Bewegung beschreibenden Größen seien Funktionen nur einer Raumkoordinate z und der Zeit t, mithin jederzeit für alle Teilchen einer „Schicht", d. h. einer zur z-Achse senkrechten Ebene, gleich groß. Die Geschwindigkeitskomponenten u und v brauchen nicht notwendig identisch Null zu sein, sondern können gleichfalls von z und t abhängen, sich also sogar von Schicht zu Schicht und mit der Zeit ändern.

II. *Äußere Kräfte seien nicht vorhanden.*

III. *Die Dichte sei nur vom Druck abhängig.* (Der Einfluß von Reibung und Wärmeleitung wird erst in den beiden letzten Paragraphen berücksichtigt.)

Unter diesen Voraussetzungen nimmt das oben genannte System simultaner Differentialgleichungen folgendes Aussehen an:

$$(1)\qquad \frac{\partial u}{\partial t}+w\frac{\partial u}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial v}{\partial t}+w\frac{\partial v}{\partial z}=0,\quad \frac{\partial w}{\partial t}+w\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{-1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial P}{\partial z},$$

$$(2)\qquad \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial(\varepsilon w)}{\partial z}=0,$$

$$(3)\qquad \varepsilon=\varepsilon(P).$$

Die Lösung dieser fünf simultanen Gleichungen läßt sich zurückführen auf die Lösung nur einer partiellen Differentialgleichung, die allerdings von der zweiten Ordnung ist. Sie zeigen zunächst eine wichtige Eigenschaft: *Die letzten drei bilden für sich bereits ein „vollständiges" System simultaner Gleichungen*, weil darin von den fünf Unbekannten u, v, w, ε, P nur drei, nämlich w, ε, P vorkommen, so daß w, ε, P daraus berechnet werden können. Wenn das geschehen ist, bleibt noch mit Hilfe des für w gefundenen Ausdrucks u und v aus den ersten zwei Gleichungen (1) zu bestimmen. Diese beiden Gleichungen scheiden vorläufig aus unseren Betrachtungen aus. *Die Integration der letzten drei Gleichungen in* (1) *bis* (3) *führen wir zurück auf die Integration nur einer partiellen Differentialgleichung*, die wir jetzt gewinnen wollen.

Wir multiplizieren die dritte Gleichung (1) mit ε, die Gleichung (2) mit w, addieren beide und erhalten $\frac{\partial}{\partial z}(\varepsilon w^2+P)=\frac{\partial(-\varepsilon w)}{\partial t}$. Ferner ist nach (2) $\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}=\frac{\partial(-\varepsilon w)}{\partial z}$. Darum gibt es zunächst eine Funktion von z und t — wir nennen sie F_1 — derart, daß

$$(4)\qquad \varepsilon w^2+P=\frac{\partial F_1}{\partial t},\qquad -\varepsilon w=\frac{\partial F_1}{\partial z}$$

ist; und ferner gibt es eine Funktion F_2 von z und t derart, daß

$$(5)\qquad \varepsilon=\frac{\partial F_2}{\partial z},\qquad -\varepsilon w=\frac{\partial F_2}{\partial t}$$

ist. Nun ist nach den letzten Gleichungen in (4) und (5)

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial F_2}{\partial t}.$$

Folglich existiert eine Funktion Φ von z und t, so daß

$$(6)\qquad F_1=\frac{\partial \Phi}{\partial t},\qquad F_2=\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

ist. *Alle die Bewegung beschreibenden Größen u, v, w, ε, P lassen sich als partielle Ableitungen dieser Funktion Φ darstellen, die wir Strömungsfunktion nennen wollen.* Aus (4) bis (6) ergibt sich zunächst

$$(7)\qquad \varepsilon=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2},\qquad w=-\frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}},\qquad P=\frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}}.$$

Setzen wir nun die in (7) für ε und P erhaltenen Ausdrücke in (3) ein, so gelangen wir zu der gewünschten *Differentialgleichung für die Strömungsfunktion Φ, auf deren Lösung somit die Lösung der simultanen Gleichungen* (1_3) *bis* (3) *zurückgeführt ist.*

Von den in (3) enthaltenen möglichen Beziehungen wollen wir nur die beiden Fälle betrachten, die bei idealen Gasen mit der *Zustandsgleichung*

$$(8)\qquad P=\frac{R}{m}\cdot\varepsilon\vartheta$$

(wobei R die absolute Gaskonstante, m die Molmasse des betreffenden Gases und ϑ die absolute Temperatur ist) den isothermen und den adiabatischen Vorgängen entsprechen.

Im ersten Falle geht (3) in die *Boyle-Mariottesche Beziehung*

$$\frac{P}{\varepsilon} = \lambda = \frac{P_0}{\varepsilon_0} \tag{9a}$$

über, wo λ eine Konstante ist, die durch ein Paar zusammengehörender Werte P_0 und ε_0 bestimmt ist. *Die Differentialgleichung der Strömungsfunktion Φ lautet dann*

$$\lambda\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2 - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0. \tag{10a}$$

Im andern Falle wird aus (3) die *Poissonsche Beziehung*

$$\frac{P}{\varepsilon^\varkappa} = \lambda' = \frac{P_0}{\varepsilon_0^\varkappa}. \tag{9b}$$

λ' ist eine durch ein Paar zusammengehörender Werte P_0 und ε_0 bestimmte Konstante. $\varkappa$ ist das Verhältnis $\frac{c_p}{c_v}$ der spezifischen Wärmen der Flüssigkeit bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen. Daraus ergibt sich als *Differentialgleichung der Strömungsfunktion Φ*:

$$\lambda'\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)^{\varkappa+1} + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2 - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0. \tag{10b}$$

(10b) enthält natürlich (10a) als Spezialfall $\varkappa = 1$. Wir sind überhaupt nicht gehalten, in (10b) $\varkappa$ gleich dem Verhältnis der spezifischen Wärmen zu setzen, $\varkappa$ also die aus der Physik bekannten Werte $\frac{5}{3}, \frac{7}{5}, \frac{4}{3}$ usw. zu geben, sondern wir können z. B. auch solche wählen, die zwischen den genannten Werten und 1 liegen. Mit diesen Werten für $\varkappa$ gewinnen wir Näherungsdarstellungen für diejenigen eindimensionalen nichtstationären Flüssigkeitsbewegungen, die weder völlig isotherm noch völlig adiabatisch verlaufen.

Ist (10a) oder (10b) unter Berücksichtigung etwaiger Randbedingungen integriert, so *berechnen sich die Geschwindigkeitskomponenten u, v, w, die Dichte ε, der Druck P, die Wirbelkomponenten, die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen durch Differentiationen und einfache algebraische Operationen*, die stets ausführbar sind, und dasselbe gilt nach (8) im adiabatischen Falle von der Temperatur ϑ. Das soll im einzelnen jetzt ausgeführt werden.

Für die Berechnung von ε, w, P gilt (7). Der Druck P kann kürzer mit Hilfe der Formeln (9) berechnet werden:

im isothermen Falle nach (9a)	im adiabatischen Falle nach (9b)
$P = \lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$	$P = \lambda'\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)^\varkappa$

Da wir Φ und daher auch w jetzt als bekannt ansehen, *so bestimmen wir u und v aus den ersten zwei Gleichungen* (1) *und zwar ist das in völliger Allgemeinheit möglich.* Die Lösungen lauten:

$$u = U\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right), \qquad v = V\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right), \tag{11}$$

wobei U und V beliebige Funktionen bedeuten. Sie können erst durch etwaige Randbedingungen bestimmt werden.

Bezeichnen wir noch mit c die Translations- und mit u die Wirbelgeschwindigkeit eines Flüssigkeitsteilchens, so gilt bekanntlich

$$\mathfrak{u} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\mathfrak{c} \tag{12}$$

und daher für die Wirbelkomponenten ξ, η, ζ

$$(12') \qquad \xi = -V' \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \qquad \eta = +U' \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \qquad \zeta = 0.$$

Aus (11) und (12′) ergibt sich, da $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$ nach seiner Bedeutung (7) niemals verschwinden kann, daß *die Wirbelgeschwindigkeit nur dann identisch gleich Null ist, wenn sich die Funktionen U und V auf Konstante reduzieren*, also alle Flüssigkeitsteilchen dauernd dieselben Geschwindigkeitskomponenten $\bar{u}$ und $\bar{v}$ besitzen. *Nur in diesem Fall findet demnach wirbelfreie Bewegung statt, und ein Geschwindigkeitspotential existiert.* Aus (12′) ersieht man sofort, daß sonst die Wirbellinien Gerade sind, die sämtlich der xy-Ebene parallel sind und deren Richtungen sich nur von Schicht zu Schicht ändern. Eine substantielle Betrachtung ähnlich der sogleich folgenden zeigt, *daß jede einzelne Wirbellinie bei ihrer Bewegung ihre Richtung beständig beibehält.*

Wir betrachten jetzt die Bewegung des einzelnen (substantiellen) Flüssigkeitsteilchens. Für sie gelten die folgenden simultanen gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$(13) \qquad \frac{dx}{dt} = u \equiv U\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right), \qquad \frac{dy}{dt} = v \equiv V\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right), \qquad \frac{dz}{dt} = w \equiv -\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\, \partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}.$$

Aus der letzten dieser Gleichungen folgt durch Integration sofort

$$(14) \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \text{konst.}$$

als *die Beziehung zwischen der Koordinate z eines Flüssigkeitsteilchens (oder einer substantiellen Schicht) und der Zeit t.* Der Wert der Konstante ist durch die die Schicht charakterisierenden Anfangswerte z_0 und t_0 bestimmt, d. i. im Grunde durch irgendein Wertepaar z und t, das der betreffenden Flüssigkeitsschicht bei der Bewegung einmal entspricht. Demnach ist die Konstante in (14) gleich

$$(14') \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z_0, t_0} = c_0$$

und ändert sich somit nur von Schicht zu Schicht. Mittels (14) werden nun auch die rechten Seiten der beiden ersten Gleichungen (13) von z_0 und t_0 abhängige Konstante, also gleich den Anfangswerten u_0 und v_0 für das betreffende Teilchen oder die betreffende Schicht:

$$\frac{dx}{dt} = u_0, \qquad \frac{dy}{dt} = v_0,$$

so daß sich als *Lösungen des Systems* (13), *d. h. als endliche Bewegungsgleichungen eines (substantiellen) Teilchens die Gleichungen ergeben*:

$$(15) \qquad x - x_0 = u_0 \cdot (t - t_0), \qquad y - y_0 = v_0 \cdot (t - t_0), \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = c_0.$$

$x_0, y_0, z_0, t_0, u_0, v_0$ sind dabei zusammengehörende Werte, die Anfangswerte des Teilchens. Als Folge der beiden ersten Gleichungen (15) sei noch die Formel

$$(16) \qquad \frac{x - x_0}{y - y_0} = \frac{u_0}{v_0}$$

vermerkt oder die Tatsache, daß *alle Teilchen einer substantiellen Schicht sich in einander (und zur z-Achse) parallelen Ebenen (in kongruenten Bahnen) bewegen. Die Bahnebenen haben aber für Teilchen verschiedener Schichten im allgemeinen verschiedene Richtung.* Werden die rechten Seiten der beiden ersten Gleichungen (13) und damit in (15) und (16)

auch die Konstanten u_0 und v_0 noch unabhängig von z_0 und t_0, nehmen sie also für alle Schichten dieselben Werte $\bar{u}$ und $\bar{v}$ an (Fall der Potentialbewegung), so sind die Bahnebenen der Teilchen aller Schichten einander parallel.

Kombinieren wir die oben für ε, w usw. gefundenen Ausdrücke mit (14), *indem wir eine der unabhängigen Variablen, entweder z oder t, eliminieren, so erhalten wir die substantielle Dichte, die substantielle Geschwindigkeit usw.* Wir nennen sie bzw. ε_s, w_s, P_s, ϑ_s, u_s, v_s usw. So gilt z. B.

$$\varepsilon_s = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \qquad w_s = -\frac{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z\, \partial t}}{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}, \tag{17}$$

wobei gleichzeitig ist $\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z_0, t_0} = c_0$.

Eliminieren wir nun aus den drei Gleichungen (17) z und t, so resultiert eine Gleichung der Form

$$f(\varepsilon_s, w_s) = c_0. \tag{18}$$

Diese Funktion f von ε_s und w_s, die längs der Bahn eines Flüssigkeitsteilchens konstant bleibt, wird uns weiter unten noch einmal entgegentreten. *Übrigens stellt* (18) *die auf der εw-Ebene abgebildete Bahn dar, die das Flüssigkeitsteilchen (und mit ihm alle Teilchen der zugehörigen Schicht) in der zt-Ebene beschreibt* und die in dieser Ebene durch die dritte Gleichung (15) oder (17) gegeben ist. Die Abbildung wird durch die ersten zwei Gleichungen (17) bewirkt.

So sehen wir, daß bei Kenntnis der Strömungsfunktion Φ oder der Ableitung $\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}$ *im wesentlichen der ganze Ablauf der Bewegung der einzelnen Teilchen bestimmt ist.* — Gesagt werden muß noch, daß die durch Einführung der Strömungsfunktion Φ erhaltenen Ergebnisse zum Teil sich auch direkt aus den Gleichungen (1) bis (3) ergeben.

§ 2. Transformation der Differentialgleichungen für die Strömungsfunktion und Integration.

Da die Differentialgleichung der Strömungsfunktion (z. B. (10 a) oder (10 b)) nur zweite Differentialquotienten enthält, ist von vornherein klar, daß diese Gleichung die Funktion Φ höchstens bis auf ein additives, unbestimmt bleibendes Zusatzglied von der Form

$$\alpha z + \beta t + \gamma \tag{19}$$

bestimmt. Ein solches Glied bleibt aber nach (7) auch auf die physikalisch allein interessierenden Größen ohne Einfluß. Von dieser Unbestimmtheit abgesehen ist aber, wie sich zeigen läßt, Φ völlig bestimmt, wenn zur Anfangszeit t_0 die Dichte ε (oder der Druck P) und die Geschwindigkeitskomponente w überall als eindeutige Funktionen von z gegeben sind, oder wenn auf der Anfangsebene z_0 die Dichte (oder der Druck) und die Geschwindigkeitskomponente w als Funktionen von t gegeben sind.

Der Natur der Sache würde es entsprechen, die Lösung zu durch den physikalischen Tatbestand vorgeschriebenen Anfangsbedingungen (Randbedingungen) zu bestimmen. Wegen der Schwierigkeit dieser Aufgabe werden wir uns darauf beschränken, einige partikuläre Integrale (ohne Beachtung von Randbedingungen) anzugeben und diese physikalisch zu deuten. Dazu transformieren wir (10 a) und (10 b) in (im engeren Sinne) lineare Differentialgleichungen. Jede ihrer partikulären Lösungen führt rückwärts zu einer Lösung von (10 a) bzw. (10 b). Eines der partikulären Integrale, zu dem wir so

gelangen werden (vgl. unten (33 a)), wäre leicht auch mittels der bekannten Methode der Separation der Variabeln herzuleiten gewesen.

Um nun näher auf die Transformationsmethode einzugehen, empfiehlt es sich, statt der bisher für die Variabeln gebrauchten Bezeichnung eine zweite Bezeichnung einzuführen, nämlich statt z, t, Φ bzw. x, y, z zu schreiben und weiterhin die Ableitungen der abhängigen Variabeln z nach den unabhängigen Variabeln x, y wie folgt abzukürzen:

$$(20) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = p, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = q, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = r, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = s, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = t.$$

Dann lautet die Differentialgleichung (10 a) in zweiter Bezeichnung:

$$(21\text{ a}) \qquad \lambda r^2 + s^2 - rt = 0.$$

Differenzieren wir diese nach x und benutzen die erste Gleichung (20), so ergibt sich

$$(2\lambda r - t) \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2s \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} - r \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0.$$

Hierin ersetzen wir t mittels (21 a) durch r und s, und ferner schreiben wir ε für r, was wir nach der (in erster Bezeichnung geschriebenen) ersten Gleichung (7) tun dürfen. Wir erhalten

$$(s^2 - \lambda\varepsilon^2) \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2\varepsilon s \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} + \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0.$$

Diese Gleichung wandeln wir in eine im engeren Sinne lineare Differentialgleichung mit den unabhängigen Variabeln ε und s und der abhängigen Variabeln ζ um durch die Legendresche Transformation (Berührungstransformation)

$$(22) \qquad p = -\zeta + x\varepsilon + ys$$

und bekommen (Goursat, Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre II, Seite 248)

$$(23\text{ a}) \qquad \varepsilon^2 \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varepsilon^2} + 2\varepsilon s \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \varepsilon\,\partial s} + (s^2 - \lambda\varepsilon^2) \cdot \frac{\partial^2 \zeta}{\partial s^2} = 0.$$

Zur weiteren Vereinfachung führen wir statt der unabhängigen Variabeln ε und s die unabhängigen Variabeln ξ und η ein mittels der Gleichungen

$$(24\text{ a}) \qquad \xi = \frac{s}{\varepsilon}, \qquad \eta = \sqrt{\lambda} \ln \varepsilon,$$

wodurch (23 a) in

$$(25\text{ a}) \qquad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0$$

übergeht. *Das ist eine (im engeren Sinne) lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typ.* Die vorliegende Form ist die der gedämpften Wellen; sie wird auch Telegraphengleichung genannt. (Horn, Partielle Differentialgleichungen, Seite 352). Für (25 a) sind leicht unendlich viele partikuläre Integrale anzugeben, z. B. lassen sich aus einem Integral leicht durch Differentiation oder Integration nach ξ oder η weitere Integrale herleiten.

Nehmen wir nun einmal an, wir hätten ein beliebiges Integral $\zeta(\xi, \eta)$ von (25 a) gefunden. Dann gelangen wir zu einem Integral der ursprünglich vorliegenden Differentialgleichung (10 a), indem wir an diesem Integral die am Anfange dieses Paragraphen durchgeführten Transformationen (und die Bezeichnungsänderung, die zu (21 a) führte,) rückgängig machen. Das gefundene Integral formt sich mit Hilfe von (24 a) um in eine Funktion von ε und s und die Berührungstransformation (22) liefert

$$(26\text{ a}) \qquad p = x\varepsilon + ys - \zeta\left(\frac{s}{\varepsilon}, \sqrt{\lambda} \ln \varepsilon\right).$$

Gelingt es, aus (26 a) und den beiden Gleichungen

$$x = \frac{\partial \zeta}{\partial \varepsilon}, \qquad y = \frac{\partial \zeta}{\partial s} \tag{27}$$

ε und s zu eliminieren, so erhalten wir für p eine Darstellung von der Form

$$p = p(x, y). \tag{28}$$

Somit folgt nach der ersten Gleichung (20)

$$z = \int p(x, y) \cdot \partial x + h(y). \tag{29}$$

Hier ist $h(y)$ eine durch die Integration hinzutretende Funktion von y, die sich durch Einsetzen der rechten Seite von (29) für z in (21 a) bestimmen läßt. *Damit ist die Strömungsfunktion z* (in zweiter Bezeichnung) *gefunden.* An dieser Stelle sei nochmals auf die im Anschluß an (19) gemachten Ausführungen verwiesen. Hinzufügen müssen wir noch, daß sich für Φ und damit auch für ε, w usw. auch mehrdeutige Funktionen ergeben können. Eine Diskussion der zugehörigen Flüssigkeitsbewegung stößt dann auf Schwierigkeiten. Die die Bewegung beschreibenden Größen ε, w usw. sind nur in gewissen Bereichen der zt-Ebene reell.

Jedoch nicht immer wird es gelingen, ε und s aus den drei Gleichungen (26 a) und (27) zu eliminieren; stets aber ist es möglich, aus diesen x und y zu entfernen, so daß wir statt zu der Darstellung (28) für p zu einer Parameterdarstellung

$$p = \bar{p}(\varepsilon, s) \tag{30}$$

gelangen. Für s setzen wir praktischer $- \varepsilon w$ und erhalten, die Funktion auf der rechten Seite jetzt f nennend,

$$p = f(\varepsilon, w).$$

(27) schreiben wir folgendermaßen, s durch $- \varepsilon w$ ersetzend:

$$x = x(\varepsilon, w), \qquad y = y(\varepsilon, w).$$

Die drei letzten Gleichungen lauten in erster Bezeichnung, (d. h. z, t, Φ sind die Variabeln):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = f(\varepsilon, w), \qquad z = z(\varepsilon, w), \qquad t = t(\varepsilon, w). \tag{31}$$

Die rechte Seite der ersten Gleichung stellt, gleich einer Konstante gesetzt, nach den an (18) geknüpften Ausführungen *das in der εw-Ebene liegende Abbild der Bahn eines Flüssigkeitsteilchens (einer Schicht) in der zt-Ebene dar. Die beiden andern Gleichungen* (31) *liefern uns eine Lösung der simultanen Gleichungen* (1) *bis* (3) jedoch nicht in der gewünschten „expliziten" Form $\varepsilon = \varepsilon(z, t)$ und $w = w(z, t)$, sondern *in einer „impliziten" Form,* so daß die Koordinaten z und t als Funktionen von ε und w erscheinen. *Eine graphische Darstellung durch die Kurven $f(\varepsilon, w) = konst.$, $z(\varepsilon, w) = konst.$, $t(\varepsilon, w) = konst.$ in der εw-Ebene gestattet, alle Einzelheiten der Strömung abzulesen.*

Wir geben einige Integrale für (10 a) an, die sich aus Integralen von (25 a) durch die in (26 a) bis (29) angegebenen Operationen ergeben. A bedeutet im folgenden eine beliebige Konstante.

Aus dem Integral $\zeta \equiv A \,.\, \xi$ ergibt sich das Integral

$$\Phi \equiv A \,.\, \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{t} + \lambda t \ln t \right). \tag{32 a}$$

Ebenso korrespondieren $\zeta \equiv A \,.\, (\xi^2 e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\eta} + 2\sqrt{\lambda}\,\eta \,.\, e^{\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\eta})$ und

$$\Phi \equiv (2\lambda A)^2 \,.\, e^{\frac{z}{2\lambda A} + \frac{t^2}{8\lambda A^2} - 1}. \tag{33 a}$$

Desgleichen entsprechen einander $\zeta \equiv A \,.\, (\xi^2 - 2\sqrt{\lambda}\,\eta)$ und

$$(34\,a)\quad \Phi \equiv A \cdot \left\{ -\frac{z^3}{6t^2} \pm \frac{(z^2 - 4\lambda t^2)^{\frac{3}{2}}}{6t^2} + 2\lambda z \cdot \ln\left(-z \pm \sqrt{z^2 - 4\lambda t^2}\right) \pm 2\lambda \sqrt{z^2 - 4\lambda t^2} - 4\lambda z \ln t \right\}.$$

Und ferner entsprechen einander $\zeta \equiv A \cdot (\xi^3 \cdot e^{\sqrt{\lambda}^{-1}\eta} + 6\sqrt{\lambda}\,\xi\,\eta\, e^{\sqrt{\lambda}^{-1}\eta})$ und

$$(35\,a)\quad \Phi \equiv (6\lambda A)^2 \left\{ \left(\sqrt[3]{\frac{z}{4A} + \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}} + \sqrt[3]{\frac{z}{4A} - \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}} \right)^2 + \lambda \right\}$$
$$\cdot e^{\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{t}{3A} - \left(\sqrt[3]{\frac{z}{4A} + \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}} + \sqrt[3]{\frac{z}{4A} - \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}}\right)^2\right]}.$$

Aus diesen Integralen Φ berechnen sich nach den Angaben im ersten Paragraphen ε, w usw. durch leicht ausführbare Operationen, wobei wir bei den einfacheren unter den genannten Integralen zu Lösungen der Gleichungen (1) bis (3) gelangen, die auch unschwer aus diesen direkt zu gewinnen gewesen wären.

Zur Diskussion des Integrals (32 a) berechnen wir nach den Vorschriften des ersten Paragraphen aus der in (32 a) vorliegenden Strömungsfunktion Φ die Dichte, die Geschwindigkeitskomponenten, die Bahnen usw. Bei $A > 0$ ist Φ einer physikalischen Deutung fähig für alle die Wertepaare z und t, bei denen $t > 0$ ist. Die Dichte ε ist nur von t abhängig und nimmt ab, wenn t wächst. Die Flüssigkeitsteilchen bewegen sich auf Geraden, die bei Potentialbewegung sämtlich einander parallel sind. Bei Wirbelbewegung sind nur die Bahngeraden der derselben Schicht angehörenden Teilchen parallel. Während der Bewegung nimmt die substantielle Dichte ε_s ab, die substantielle Geschwindigkeitskomponente w_s ist eine von Schicht zu Schicht verschiedene Konstante. Die Lösung (32 a) stellt eine isotherme Expansion einer Flüssigkeit (eines Gases) dar; bei $A < 0$ würde eine isotherme Kompression vorliegen.

Zur Diskussion des Integrals (33 a) geben wir an: Die Flüssigkeit bewegt sich mit räumlich gleicher, aber zeitlich veränderlicher Geschwindigkeitskomponente w. Die substantielle Dichte ε_s jedes Teilchens ist während der ganzen Bewegung eine von Teilchen zu Teilchen verschiedene Konstante. Die Flüssigkeit verhält sich demnach, falls die Bewegung wirbelfrei ist, wie ein starrer Körper, (der in bezug auf seine Dichte inhomogen ist). Die Flüssigkeitsteilchen beschreiben parabolische Bahnen, die bei wirbelfreier Bewegung sämtlich kongruent sind, während bei Wirbelbewegung nur die Bahnen der Teilchen ein und derselben (substantiellen) Schicht einander kongruent sind.

Aus der Lösung (34 a) ergibt sich für die Dichte ε, die Geschwindigkeitskomponente w und die Bahnen:

$$\varepsilon = -A \cdot \frac{z \mp \sqrt{z^2 - 4\lambda t^2}}{t^2}, \qquad w = \frac{z \mp \sqrt{z^2 - 4\lambda t^2}}{2t}$$
$$\left(\frac{z \mp \sqrt{z^2 - 4\lambda t^2}}{2t}\right)^2 - 2\lambda \ln\left(\frac{z \mp \sqrt{z^2 - 4\lambda t^2}}{t^2}\right) = c_0,$$
$$x - x_0 = u_0 \cdot (t - t_0), \qquad y - y_0 = v_0 \cdot (t - t_0).$$

Das Geradenpaar $z^2 - 4\lambda t^2 = 0$ teilt die zt-Ebene in vier Teile. ε, w usw. sind, wie die Formeln zeigen, nur in den von der z-Achse durchzogenen beiden Teilen reell. Da ε nur in einem dieser beiden Teile größer als Null, im andern dagegen kleiner als Null ist, so ist die Lösung (34 a) im Falle $A < 0$ nur in dem Teil der zt-Ebene der physikalischen Deutung fähig, der die positive z-Achse enthält, im Falle $A > 0$ in dem Teile, der die negative z-Achse enthält. Bei Gültigkeit des oberen Vorzeichens vor der Wurzel in den angeführten Formeln wird auf der z-Achse $w = 0$, bei Gültigkeit des unteren wird auf der

z-Achse $w = \infty$. Im letzteren Falle ist darum eine physikalische Deutung auch für alle Punkte der z-Achse unmöglich. Wir beschränken die Diskussion auf das obere Vorzeichen und auf $A < 0$. Das Integral stellt die Bewegung einer Flüssigkeit von räumlich verschiedener Dichte dar, die aus einer Expansion und darauf folgender Kompression besteht. Jedes Flüssigkeitsteilchen erreicht zur Zeit $t = 0$ den Punkt seiner Bahn, dessen Koordinate z am kleinsten ist. Wenn t von negativen zu positiven Werten fortschreitet, wächst w von negativen Werten zu positiven Werten an. Wie bereits angegeben, ist für $t = 0$ überall $w = 0$. Je größer z ist, desto kleiner ist bei gleichem t die Dichte. Zur Zeit $t = 0$ erreicht sie überall ihren kleinsten Wert, der von Schicht zu Schicht verschieden ist.

Aus dem partikulären Integral (35a) gewinnen wir auf dem im ersten Paragraphen angegebenen Wege u. a. die Formeln

$$\varepsilon = e^{\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{t}{3A} - \left(\sqrt[3]{\frac{z}{4A} - \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}} + \sqrt[3]{\frac{z}{4A} - \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}}\right)^2\right]},$$

$$w = \sqrt[3]{\frac{z}{4A} + \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}} + \sqrt[3]{\frac{z}{4A} - \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}},$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{z}{4A} + \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}} + \sqrt[3]{\frac{z}{4A} - \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}}\right)$$

$$\cdot e^{\frac{1}{2\lambda}\left[\frac{t}{3A} - \left(\sqrt[3]{\frac{z}{4A} + \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}} + \sqrt[3]{\frac{z}{4A} - \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}}\right)^2\right]} = c_0,$$

$$\left(\sqrt[3]{\frac{z}{4A} + \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}} + \sqrt[3]{\frac{z}{4A} - \sqrt{\left(\frac{z}{4A}\right)^2 - \lambda^3}}\right) \cdot \varepsilon_s = c_0, \qquad w_s \cdot e^{\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{t}{3A} - w_s^2\right)} = c_0,$$

$$\varepsilon_s \cdot w_s = c_0.$$

Die Formeln ergeben außerhalb des von den Geraden $z = \pm 4\lambda^{\frac{3}{2}}A$ eingeschlossenen Gebietes der zt-Ebene einen reellen Wert für ε, w, z usw., innerhalb jedoch drei reelle Werte. Einer physikalischen Deutung ist die Lösung (35a) ohne weiteres fähig außerhalb des genannten Gebietes. Wie die Verhältnisse innerhalb liegen, würde eine graphische Darstellung der Bewegung in der zt-Ebene (oder auch deren Abbildung auf der εw-Ebene) zeigen. Insbesondere ergibt sich, daß die Koordinate z jeder Bahn nicht für alle t reell ist. Wir beschränken uns darauf, die Lösung für $A > 0$ und für alle $z > 4\lambda^{\frac{3}{2}}A$ zu deuten. Die Flüssigkeit strömt von Orten höherer Dichte ε (also höheren Drucks) mit wachsender substantieller Geschwindigkeitskomponente w_s zu Orten niedrigerer Dichte (also niedrigeren Drucks). Dabei wird im Laufe der Zeit die Dichte ε überall zunehmen. Die Geschwindigkeitskomponente w ist nur vom Orte abhängig. Die Bahnen sind Kurven, deren Krümmung bei wachsendem z abnimmt. Im Laufe der Bewegung wird die Koordinate z jedes Flüssigkeitsteilchens größer. Ist $A < 0$ und $z > 4\lambda^{\frac{3}{2}}A$, so bewegt sich die Flüssigkeit von Orten niedrigerer Dichte mit absolut abnehmender Geschwindigkeitskomponente w_s zu Orten höherer Dichte, wobei die Koordinate z jedes Flüssigkeitsteilchens immer kleiner wird. Die Dichte ε nimmt im Laufe der Zeit überall ab.

Die für den adiabatischen Fall gültige Differentialgleichung (10b) transformieren wir in ähnlicher Weise, wie das mit der für den isothermen Fall gültigen Differentialgleichung (10 a) geschehen ist, und erhalten schließlich durch die Legendresche Transformation

$$p = -\zeta + x\varepsilon + ys$$

und die Transformation

(24 b) $$\frac{s}{\varepsilon} = \xi, \qquad \frac{2\sqrt{\lambda' \varkappa}}{\varkappa - 1} \cdot \varepsilon^{\frac{\varkappa - 1}{2}} = \eta$$

die (25 a) entsprechende Gleichung

(25 b) $$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \eta^2} - \frac{\varkappa - 3}{\varkappa - 1} \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} = 0.$$

Das ist gleichfalls eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typ.

Wir nennen nun einige Integrale von (25 b) und dahinter diejenigen Integrale von (10 b), die aus den zuerst genannten durch Rückwärtstransformieren hervorgehen. A sei dabei eine beliebige Konstante.

Aus dem Integral $\zeta \equiv A \cdot \xi$ der Differentialgleichung (25 b) ergibt sich ein Integral der Differentialgleichung (10 b), nämlich

(32 b) $$\Phi \equiv \frac{1}{2} \cdot A \cdot \frac{z^2}{t} + \lambda' A^{\varkappa} \cdot \frac{1}{(\varkappa - 1)(\varkappa - 2)} \cdot t^{2-\varkappa}.$$

Ebenso korrespondieren miteinander

$$\zeta \equiv A \cdot \left(\xi^2 \eta^{\frac{2}{\varkappa - 1}} + \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa} \cdot \eta^{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}} \right) \qquad \text{und}$$

(33 b) $$\Phi \equiv B \cdot \frac{\varkappa - 1}{2\varkappa - 1} \cdot \left(\frac{1}{4\alpha A} \cdot t^2 + z \right)^{\frac{2\varkappa - 1}{\varkappa - 1}},$$

wobei die Abkürzungen B und α erklärt sind durch die Gleichungen

$$B = A^{\frac{-1}{\varkappa - 1}} \cdot \alpha^{\frac{-\varkappa}{\varkappa - 1}} \cdot \varkappa^{-1} \cdot 2^{\frac{1}{\varkappa - 1}} \cdot (\varkappa - 1)^{\frac{\varkappa - 2}{\varkappa - 1}}, \qquad \alpha = \left(\frac{2\sqrt{\lambda' \varkappa}}{\varkappa - 1} \right)^{\frac{2}{\varkappa - 1}}.$$

Desgleichen korrespondieren miteinander

$$\zeta \equiv A \cdot \left(\xi^3 \eta^{\frac{2}{\varkappa - 1}} + \frac{3(\varkappa - 1)}{2\varkappa} \cdot \xi \eta^{\frac{2\varkappa}{\varkappa - 1}} \right) \qquad \text{und}$$

(35 b) $$\Phi \equiv - \frac{A \beta^2 (\varkappa - 1)^2}{6\alpha} \cdot \left(\frac{A\beta(3\varkappa - 1)}{3\varkappa - 2} \cdot \left\{ \frac{t}{A\beta} - \frac{3\alpha}{\beta} w^2 \right\}^{\frac{3\varkappa - 2}{\varkappa - 1}} - \frac{2\varkappa}{2\varkappa - 1} \cdot t \left\{ \frac{t}{A\beta} - \frac{3\alpha}{\beta} w^2 \right\}^{\frac{2\varkappa - 1}{\varkappa - 1}} \right),$$

wobei die Abkürzungen α, β, w die in den folgenden Gleichungen angegebenen Bedeutungen haben:

$$\alpha = \left(\frac{\sqrt{2\lambda' \varkappa}}{\varkappa - 1} \right)^{\frac{2}{\varkappa - 1}}, \qquad \beta = \frac{3(\varkappa - 1)}{2\varkappa} \cdot \alpha^{\varkappa},$$

$$w = \sqrt[3]{\frac{z}{2\alpha A (3\varkappa - 1)} + \sqrt{\left(\frac{z}{2\alpha A (3\varkappa - 1)} \right)^2 - \left(\frac{(\varkappa - 1) t}{3\alpha A (3\varkappa - 1)} \right)^3}}$$
$$+ \sqrt[3]{\frac{z}{2\alpha A (3\varkappa - 1)} - \sqrt{\left(\frac{z}{2\alpha A (3\varkappa - 1)} \right)^2 - \left(\frac{(\varkappa - 1) t}{3\alpha A (3\varkappa - 1)} \right)^3}}.$$

Die Lösung (32 b) stellt ähnlich wie (32 a) eine Expansion oder Kompression dar, (die jedoch hier adiabatisch verlaufen), je nachdem $A \gtrless 0$ ist. Die Temperatur ϑ ist nur von der Zeit abhängig.

Die durch (33 b) definierte adiabatische Bewegung entspricht der in (33 a) enthaltenen isothermen. Die substantielle Temperatur ϑ_s ist eine von Schicht zu Schicht verschiedene Konstante. Im übrigen gilt dasselbe, was von (33a) ausgesagt wurde.

Für (35 b) gilt ähnliches wie für (35 a). Es sei $A > 0$ vorausgesetzt. Innerhalb des von der semikubischen Parabel

$$\left(\frac{z}{2\alpha A(3\varkappa-1)}\right)^2=\left(\frac{(\varkappa-1)t}{3\alpha A(3\varkappa-1)}\right)^3$$

abgegrenzten, die positive $t=$ Achse enthaltenden Gebietes der zt-Ebene besitzen ε, w usw. drei reelle Werte, außerhalb nur einen. Auf der semikubischen Parabel

$$\left(\frac{z}{2\alpha A}\right)^2=\left(\frac{t}{3\alpha A}\right)^3$$

ist $\varepsilon=0$, so daß eine physikalische Deutung der Lösung (35b) bei $A>0$ nur innerhalb des von dieser Kurve abgegrenzten, die positive t-Achse enthaltenden Gebietes der zt-Ebene möglich ist, da nur hier überall $\varepsilon>0$ ist. In dem außerhalb der ersten, jedoch innerhalb der zweiten semikubischen Parabel gelegenen Gebiete besteht die Bewegung in einer adiabatischen Expansion der Flüssigkeit. Bei $A<0$ liegt eine adiabatische Kompression vor.

§ 3. Die Strömungsfunktion bei Berücksichtigung der inneren Reibung.

Berücksichtigen wir nun auch den in den vorangehenden Paragraphen vernachlässigten Einfluß der inneren Reibung, so haben wir statt (1) bis (3) zu schreiben:

$$\text{(36)}\qquad \frac{\partial u}{\partial t}+w\cdot\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\varrho}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\qquad \frac{\partial v}{\partial t}+w\cdot\frac{\partial v}{\partial z}=\frac{\varrho}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{-1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial P}{\partial z}+\frac{\varrho'+2\varrho}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},$$

$$\text{(37)}\qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}+\frac{\partial(\varepsilon w)}{\partial z}=0,$$

$$\text{(38)}\qquad \varepsilon=\varepsilon(P).$$

Dabei sind ϱ und ϱ' die beiden von der Natur der Flüssigkeit abhängenden Reibungskoeffizienten. (Inkompressible Flüssigkeiten besitzen dagegen nur einen Reibungskoeffizienten.) Wir setzen sie als konstant voraus und schreiben kurz μ für $\varrho'+2\varrho$. Der dritten Gleichung (36) können wir die Form

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{-1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(P-\mu\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

geben. Benutzen wir noch die Abkürzung

$$P'=P-\mu\cdot\frac{\partial w}{\partial z},$$

so ergibt sich

$$\frac{\partial w}{\partial t}+w\cdot\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{-1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial P'}{\partial z}.$$

Diese Gleichung stimmt der Form nach mit der dritten Gleichung (1) überein. Folglich können wir in der gleichen Weise, wie es im ersten Paragraphen geschehen ist, eine Funktion Φ einführen, die wir auch hier Strömungsfunktion nennen wollen, so daß (7) entsprechend die Gleichungen gelten:

$$\text{(39)}\qquad \varepsilon=\frac{\partial\Phi^2}{\partial z^2},\qquad w=-\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}},\qquad P=\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}-\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2}{\dfrac{\partial\Phi^2}{\partial z^2}}-\mu\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}}\right).$$

Mittels (38) folgt sodann als *Differentialgleichung der Strömungsfunktion* (ähnlich wie im ersten Paragraphen) im isothermen Falle

$$\text{(40a)}\qquad \lambda\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}+\mu\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}}\right)=0$$

und im adiabatischen Falle

$$(40\,\mathrm{b}) \quad \lambda'\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)^{\varkappa+1} + \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2 - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + \mu\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z\,\partial t}}{\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}}\right) = 0.$$

Auf die Integration einer dieser beiden Differentialgleichungen, je nachdem ob Isothermie oder Adiabasie vorausgesetzt ist, wäre somit die Integration der simultanen Gleichungen (36_3) *bis* (38) *zurückgeführt.*

Nachdem Φ aus (40a) oder (40b) berechnet und daraus nach Vorschrift (39) ε, w, P als Funktionen von z und t bestimmt worden ist (P läßt sich kürzer aus ε berechnen), lassen sich die ersten zwei Gleichungen (36) lösen. Ihre Lösungen, die jedoch nicht mehr die einfache Form (11) besitzen, sind Funktionen von z und t; sie können aber auch mit Konstanten identisch sein. Im ersten Falle liegt Wirbelbewegung vor, im zweiten Potentialbewegung. (Obgleich die Flüssigkeit innere Reibung besitzt, ist eine sich erhaltende Potentialbewegung unter den zugrunde gelegten vereinfachenden Annahmen des ersten Paragraphen möglich.)

Einige Integrale von (40a) und (40b) lassen sich leicht angeben. Dabei sei bemerkt, daß wie im ersten Paragraphen auch hier die Lösungen höchstens bis auf den additiven Ausdruck $\alpha z + \beta t + \gamma$ bestimmt sind.

Aus (32a) bzw. (32b) gewinnen wir durch eine einfache Erweiterung bzw. die Integrale

$$(41\,\mathrm{a}) \qquad \Phi = A\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{t} + \lambda t\ln t\right) - \mu t\ln t,$$

$$(41\,\mathrm{b}) \qquad \Phi = \frac{1}{2}A\cdot\frac{z^2}{t} + \lambda' A^{\varkappa}\cdot\frac{1}{(\varkappa-1)(\varkappa-2)}\cdot t^{2-\varkappa} - \mu t\ln t,$$

die (40a) bzw. (40b) befriedigen. Ferner genügt das Integral (33a) ohne jede Änderung der Differentialgleichung (40a) und das Integral (33b) der Differentialgleichung (40b).

§ 4. Die Strömungsfunktion bei Berücksichtigung der inneren Reibung und der inneren Wärmeleitung.

Berücksichtigen wir bei unseren Betrachtungen der eindimensionalen nichtstationären Flüssigkeitsbewegung den Einfluß der inneren Reibung und der inneren Wärmeleitung, so müssen wir statt der fünf Gleichungen (36) bis (38) hier sechs simultane Gleichungen heranziehen, nämlich als sechste die Differentialgleichung der Wärmeleitung für strömende Flüssigkeiten. Es sind die Gleichungen:

$$(42) \qquad \begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t} + w\cdot\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\varrho}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} + w\cdot\frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\varrho}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\\ \frac{\partial w}{\partial t} + w\cdot\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{-1}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\varrho' + 2\varrho}{\varepsilon}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},\end{gathered}$$

$$(43) \qquad \frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(\varepsilon w)}{\partial z} = 0,$$

$$(44) \qquad P = \frac{R}{m}\cdot\varepsilon\vartheta,$$

$$(45) \qquad l\cdot\frac{\partial^2\vartheta}{\partial z^2} = \varepsilon c_v\cdot\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + w\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial z}\right) - \frac{R}{m}\cdot\vartheta\cdot\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} + w\cdot\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right).$$

Die Gleichung (44) ist die uns schon in (8) begegnete Zustandsgleichung. In (45) bedeutet l die (innere) Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit, die wir als konstant voraussetzen. Ähnlich wie im vierten Paragraphen können wir auch hier eine Strömungsfunktion Φ einführen, so daß die Gleichungen bestehen:

$$\varepsilon = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}, \qquad w = -\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}, \qquad P = \frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\cdot\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \left(\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}\right)^2}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}} - \mu\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\right),$$

(46)

$$\vartheta = -\frac{m}{R}\cdot\left(\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 z}}\right)^2 + \frac{m}{R}\cdot\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}} - \frac{m\mu}{R}\cdot\frac{1}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\right).$$

Setzen wir die für ε, w, ϑ soeben angegebenen Ausdrücke in (45) ein, so bekommen wir *die Differentialgleichung der Strömungsfunktion* Φ. Da bekanntlich $\frac{R}{m} = c_p - c_v$ ist, lautet sie

$$(47)\quad l\cdot\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + c_v\cdot\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)\Psi - (c_p - c_v)\cdot\Psi\cdot\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0,$$

wobei zur Abkürzung

$$-\left(\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\right)^2 + \frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}} - \mu\cdot\frac{1}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z\,\partial t}}{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}}\right) = \Psi$$

gesetzt ist. In (47) liegt eine partielle Differentialgleichung fünfter Ordnung für Φ vor. *Auf ihre Lösung ist damit die Lösung der vier simultanen Gleichungen* (42_3) *bis* (45) *zurückgeführt.* (47) enthält alle in den vorangehenden Paragraphen genannten Differentialgleichungen für Φ als Sonderfälle.

Einige Integrale lassen sich angeben. Auch diese sind nur bestimmt bis auf den additiven Ausdruck der Form $\alpha z + \beta t + \gamma$. So wird (47) durch das Integral (41b) erfüllt. Ferner sind (33a) und (33b) Lösungen von (47), bei denen wir hier ebenso wie im zweiten Paragraphen sehen, daß die Geschwindigkeitskomponente w räumlich, aber nicht zeitlich konstant ist, daß die substantielle Dichte und der substantielle Druck während der ganzen Bewegung unverändert bleiben und beide nur von der Anfangslage der (substantiellen) Schicht abhängen, der das betreffende Teilchen angehört. Die Temperatur ist bei (33a) zeitlich und räumlich konstant, bei (33b) ist die substantielle Temperatur eine von der Anfangslage der Schicht abhängige Konstante. Im Falle der Potentialbewegung, d. h. wenn u und v konstant sind, verhält sich also die Flüssigkeit wie ein starrer Körper, der in bezug auf seine Dichte inhomogen ist. *Alles, was soeben über die Integrale* (33a) *und* (33b) *ausgesagt wurde, gilt, obwohl Reibung und Wärmeleitung bei der Flüssigkeit vorhanden sind.* Endlich sei noch als Lösung von (47)

$$\Phi \equiv \iint \frac{1}{ac_v z^2 + bz + d}\cdot dz\,dz + \iint e^{-2alt+f}\cdot dt\,dt$$

genannt, wobei a, b, d, f Konstante sind. Anwendung der Formeln (46) ergibt in diesem Falle:

$$\varepsilon = \frac{1}{ac_v z^2 + bz + d}, \qquad w = 0, \qquad P = e^{-2alt+f},$$

$$\vartheta = \frac{m}{R}(ac_v z^2 + bz + d)\cdot e^{-2alt+f}.$$

Eingegangen 12. April 1930.

Berichtigung zur Arbeit von N. Tschebotarëw: „Zur Gruppentheorie des Klassenkörpers“.

(Dieses Journal 161, S. 179—193).

Aus einem von Herrn Hasse angeführten Beispiel ersehe ich, daß die auf S. 187, Z. 4—3 v. u. ausgesprochene Behauptung: „Demnach zerfällt $\mathfrak{H}$ in zwei relativ prime Faktoren, von denen jeder Normalteiler von $\mathfrak{G}'$ ist“ nicht richtig ist. Tatsächlich kann man nur behaupten, daß nur eine echte Untergruppe von $\mathfrak{H}$ in zwei solche Faktoren zerfällt. Ist nämlich

$$S_i = A_1 S_i^{-1} = A_{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu - 1)$$

(die A_i sind hier unabhängig), so zerfällt die mittels der Basis

$$B_1 = A_1 A_2 \cdots A_\nu, \quad B_i = A_i A_{i-1}^{-1} \qquad (i = 2, 3, \ldots, \nu)$$

erzeugte Gruppe in zwei Gruppen $\{B_1\}$, $\{B_2, \ldots, B_\nu\}$ von verlangter Beschaffenheit. Die Formel (4. 4) bleibt aber gültig, da in unserem Falle der Körper K_p in zwei absolut normale Körper zerfällt, also kein Elementarkörper ist.

Eingegangen 1. Januar 1931.